SIMULASI POLA DIFRAKSI FRAUNHOFER UNTUK CELAH LINGKARAN DENGAN MODIFIKASI FUNGSI BESSEL

CeciliaYanuarief
Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
Jl. Marsda Adisucipto Yogyakarta 55281 Telp. +62-274-519739
E-mail : cyanuarief@ymail.com

Abstract

This research aims to simplify the equation of Fraunhofer Difraction Intensity for the circular slit analyticaly so that it can be easily applied in the calculation of computing. Fraunhofer diffraction event for the circular slitis expressed as the ratio between Bessel functions 1 and variables with interval 0 to infinity so may result divided by zero in the calculation of computing. Solution analytical calculations done by outlining the Bessel function 1 becomes the Bessel function 0 and Bessel functions 2. The results of analytical calculations and computations, Fraunhofer diffraction pattern is obtained in the form of the intensity curve which is then displayed in 3D to get the diffraction pattern.From the results of this research concluded that the larger radius gap, resulting the diffraction pattern is getting narrower. And the greater the wavelength of the light source, resulting diffraction pattern is widening.

Keywords: *Fraunhofer diffraction, Bessel*

PENDAHULUAN

Laboratorium fisika adalah suatu tempat yang digunakan untuk melakukan percobaan atau penelitian fisika. Laboratorium fisika juga merupakan sumber pemecahan masalah yang berkaitan dengan teori fisika. Suatu proses penemuan dan penyelidikan ilmiah selalu diawali dengan perumusan masalah, hipotesis, uji hipotesis (eksperimen). Eksperimen akan menambah wawasan ilmiah dan pengalaman dalam menghadapi masalah yang timbul, akan tetapi tidak semua kuantitas besaran fisis dengan mudah diukur dengan eksperimen. Selain itu, eksperimen seringkali memerlukan waktu yang relatif lama, peralatan yang tidak memadai, dan dalam eksperimen kadang-kadang diperlukan biaya tinggi. Masalah-masalah di bidang ilmu fisika seringkali sangat sulit dan rumit untuk diselesaikan secara perhitungan analitik. Contoh masalah yang cukup rumit misalnya tentang difraksi.

Difraksi adalah penyebaran atau pembelokan gelombang pada saat gelombang tersebut melintas melalui celah atau melewati ujung penghalang. Gejala difraksi terjadi akibat dari gelombang yang terdistribusi oleh suatu penghalang yang mempunyai dimensi sebanding dengan panjang gelombang dari gelombang datang. Penghalang tersebut dapat berupa celah empat persegi panjang, celah tunggal, celah ganda, penghalang tepi lurus, maupun celah yang berbentuk lingkaran. Secara umum, difraksi dibagi dua yaitu difraksi Fresnel dan difraksi Fraunhofer. Difraksi Fresnel terjadi apabila suatu sumber titik gelombang datang sangat jauh dari celah dan pola difraksi diamati dari jarak yang dekat dari celah. Difraksi Fraunhofer terjadi apabila sinar-sinar terdifraksi sejajar (Rosi, 1962). Masalah difraksi Fraunhofer tidak mudah diselesaikan secara perhitungan analitik karena diperlukan pemahaman matematika yang kuat dan pemahaman fisika yang dalam. Pehitungan intensitas difraksi Fraunhofer dimulai dengan menghitung disturbansi optis pada layar. Persamaan disturbansi optis ini mengandung bentuk fungsi Bessel.

Fungsi Bessel merupakan bentuk fungsi differensial yang tidak familiar sehingga tidak mudah diselesaikan secara analitik. Salah satu alternatif pemecahannya adalah denganpenjabaran fungsi Bessel. Cara ini digunakan untuk meyederhanakan fungsi yang ada. Formula ini didasarkan pada strategi penggantian sebuah fungsi yang rumit.Pada tahap simulasi, peneliti menemukan persamaan disturbansi optisyang mengandung penyebut yangberpeluang memiliki nilai 0, sehingga sulit untuk dieksekusi. Oleh karena itu, perlu dilakukan analisis matematis untuk menyederhanakan persamaan disturbansi optissehinggamudah untuk disimulasikan secara komputasi serta diperoleh hasil yang lebih akurat.Berdasarkan alasan tersebut, maka penelitian ini berupaya untuk menguraikan fungsi Besselpada persamaan disturbansi optis sehinggadiperoleh persamaan disturbansi optis yang mudah untuk disimulasikan secara komputasi.

LANDASAN TEORI

Fungsi Bessel

Fungsi Bessel merupakan bentuk penyelesaian diferensial Bessel :

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} + \left(x^2 - p^2\right)y(x) = 0\,, \tag{1a}$$

Atau

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) + \left(x^2 - p^2\right)y(x) = 0 \tag{1b}$$

dengan p adalah tetapan sembarang (tidak perlu bilangan bulat) yang disebut orde dari fungsi Bessel. Penyelesaian persamaan (1) ditentukan dalam bentuk deret pangkat tergeneralisasi. Penyelesaian ini dikenal dengan metode *Frobenius*, yaitu,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}\,, \tag{2a}$$

sehingga,

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1}, \tag{2b}$$

$$x\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s}, \tag{2c}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2 a_n x^{n+s-1}, \tag{2d}$$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2 a_n x^{n+s}, \tag{2e}$$

Substitusi (2e) dan (2a) ke (1), kemudian dengan mengumpulkan koefisien-koefisien dari berbagai suku variabel bebas x, diperoleh persamaan indisial dari koefisien suku x^s, yaitu

$$\left(s^2 - p^2\right)a_0 = 0 \tag{3}$$

Karena $a_0 \neq 0$, maka :

$$s^2 - p^2 = 0 \text{ atau } s = \pm p \tag{4}$$

Koefisien x^{s+1} menghasilkan $a_1 = 0$, koefisien x^{s+2} menghasilkan $a_2 = -\frac{a_0}{\left[(2+s)^2 - p^2\right]}$, dan seterusnya.

Secara umum, dari koefisien x^{s+n} diperoleh

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2} \tag{5}$$

nilai a_n untuk $s = p$, menghasilkan

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \tag{6}$$

Karena $a_1 = 0$, semua a gasal bernilai nol. Untuk a genap, ganti n dengan $2n$ menjadi,

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)} \tag{7}$$

dengan $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ untuk sembarang p, maka diperoleh,

$$a_{2n} = -\frac{a_0\, p!}{n!\,2^{2n}\,\Gamma(n+1+p)} \tag{8}$$

Substitusi (8) ke (2a) sehingga didapatkan penyelesaian persamaan (1) dalam bentuk deret yaitu

$$y(x) = a_0\, p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n}\,\Gamma(1+p)} x^{2n+p} \tag{9}$$

Dengan,

$$a_0 = \frac{1}{2^p\, p!} \tag{10}$$

maka solusi $y(x)$ pada persamaan (9) disebut fungsi Bessel jenis pertama orde-p dan ditulis $J_p(x)$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \tag{11}$$

(Boas, 1983)

Difraksi Fraunhofer untuk Celah Lingkaran

Bentuk integral difraksi fraunhofer untuk celah lingkaran adalah :

$$U(P) = C \iint_{\delta} e^{-ik(Zz+Yy)}\, dzdy \tag{12}$$

Untuk menentukan pola difraksi Fraunhofer untuk celah lingkaran, koordinat yang paling tepat digunakan adalah koordinat polar. Jika (ρ, ϕ) yang merupakan koordinat polar dari suatu titik pada celah difraksi, maka (12) dapat dinyatakan sebagai,

$$U(P) = C \int_0^{2\pi} \int_0^{a} e^{-i\cdot k\cdot r\cdot q\cdot\cos(\phi-\Phi)}\, r\cdot dr\cdot d\phi \tag{13}$$

Jika diberikan gambaran integral fungsi Bessel $J_n(z)$ adalah :

$$\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\alpha} e^{in\alpha} d\alpha = J_n(z) \quad (14)$$

maka persamaan (13) menjadi :

$$U(P) = 2\pi C\int_0^a J_0(k\cdot r\cdot q) r\cdot dr \quad (15)$$

Menggunakan hubungan,

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1}J_{n+1}(x)\} = x^{n+1}J_n(x) \quad (16)$$

untuk nilai $n = 0$, maka pada integrasinya adalah :

$$\int_0^x x\ J_0(x)\ dx = x\ J_1(x) \quad (17)$$

Dari persamaan (2.9) dan (2.11), diperoleh :

$$U(P) = CD\left[\frac{2J_1(k\cdot a\cdot q)}{k\cdot a\cdot q}\right], \quad (18)$$

Sehingga intensitasnya dapat dinyatakan,

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left[\frac{2J_1(k\cdot a\cdot q)}{k\cdot a\cdot q}\right]^2 I_0 \quad (19)$$

dengan : $D = \pi a^2$

k = bilangan gelombang $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$

a = jari-jari celah (mm)

q = radius pola difraksi (mm)

(Hecht, 1987)

Penyebut pada persamaan (19) mengandung jari-jari celah a dan radius pola difraksi q yang interval nilainya dari 0 sampai tak hingga. Hal ini tentu akan mengakibatkan terjadi *divided by zero* saat a dan/atau q bernilai 0 saat dilakukan proses simulasi sehingga berdampak *list* program tidak bisa dieksekusi. Oleh karena itu dibutuhkan analisis matematis untuk memodifikasi bentuk persamaan (19), yaitu dari persamaan (9), $J_1(k\cdot a\cdot q)$ merupakan fungsi Bessel 1, sehingga dari persamaan (11) diperoleh,

$$J_1(k\cdot a\cdot q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^{2n+1} \quad (20)$$

Ekspansi persamaan (20) diperoleh,

$$J_1(k\cdot a\cdot q)=\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^3+\frac{1}{12}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^5-\frac{1}{144}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^7+\ldots$$

$$=\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^4-\frac{1}{144}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^6+\ldots\right]$$

$$=\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^2-\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^4-\frac{1}{6}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^4\right)+\left(\frac{1}{48}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^6-\frac{1}{36}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^6\right)+\ldots\right]$$

$$=\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\left(\left[1-\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^4-\frac{1}{36}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^6+\ldots\right]+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^4+\frac{1}{48}\left(\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\right)^6+\ldots\right]\right)$$

$$J_1(k\cdot a\cdot q)=\frac{(k\cdot a\cdot q)}{2}\left(J_0(k\cdot a\cdot q)+J_2(k\cdot a\cdot q)\right) \tag{21}$$

Maka persamaan (19) menjadi,

$$I(P)=\left(J_0(kaq)+J_2(kaq)\right)^2\cdot I_0 \tag{22}$$

Tampak pada persamaan (22) sudah tidak mengandung penyebut lagi sehingga lebih *executable* jika dilakukan simulasi dengan komputasi.

BAHAN DAN METODE

Bahan

Objek dalam penelitian ini adalah difraksi Fraunhofer untuk celah lingkaran sebagai perintangnya.Pola difraksi dibentuk melalui program dengan masukan jari-jari celah (*a*), panjang gelombang (λ), dan intensitas awal (*I0*). Dalam pembuatan program ini digunakan aplikasi*Matlab*. Aplikasi ini dapat digunakan untuk membuat pola difraksi dengan bantuan fungsi *Bessel.*

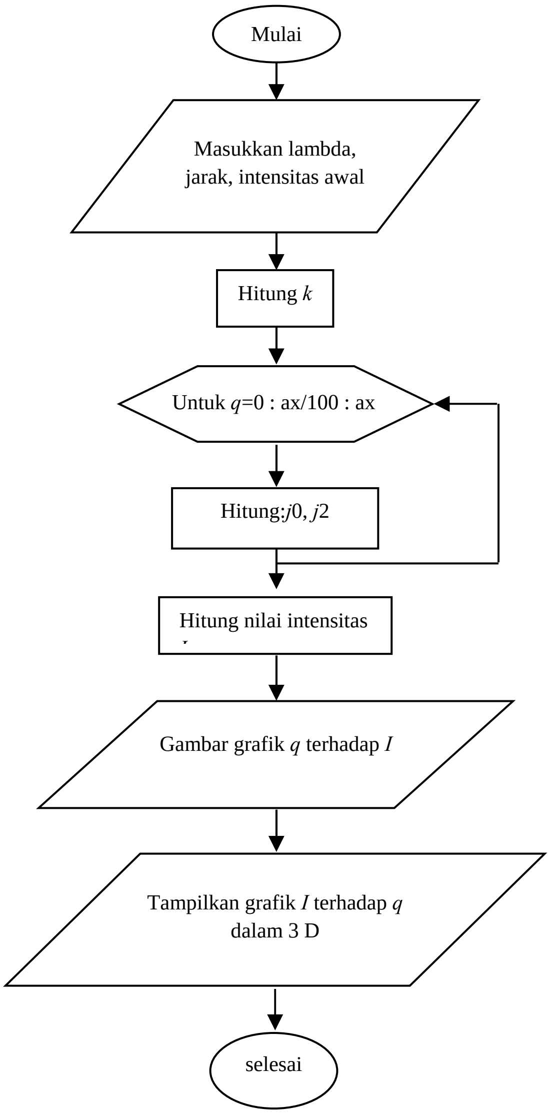
Secara garis besar program ini membahas tentang ilustrasi poladifraksi Fraunhofer untuk celah lingkaran dengan persamaan intensitas difraksi yang telah dimodifikasi.

Algoritma Pemrograman

A. Algoritma

1. Masukan
   a. Panjang gelombang dalam nm
   b. Jari-jari celah lingkaran dalam mm
   c. Intensitas awal dalam W/m^2
2. Untuk radius difraksi *q* = 0 sampai *ax* (lebar axis) :
   a. Hitung j0 = besselj(0,*k**a*q*) ;
   b. Hitung j2 = besselj(2,*k**a*q*);
3. Hitung nilai intensitas *I*
4. Gambarkan grafik *I* terhadap *q*
5. Tampilkan grafik *I* terhadap *q* dalam 3 dimensi

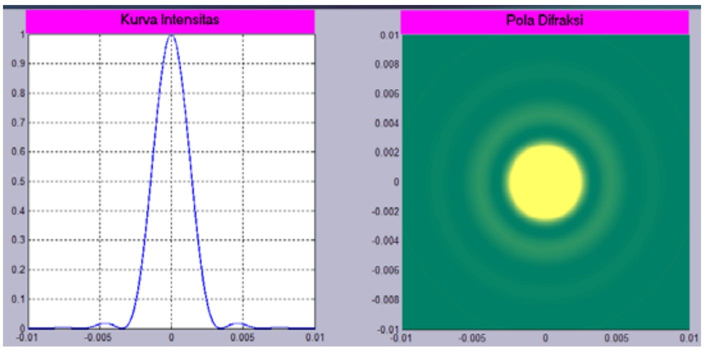
B. Flow Chart



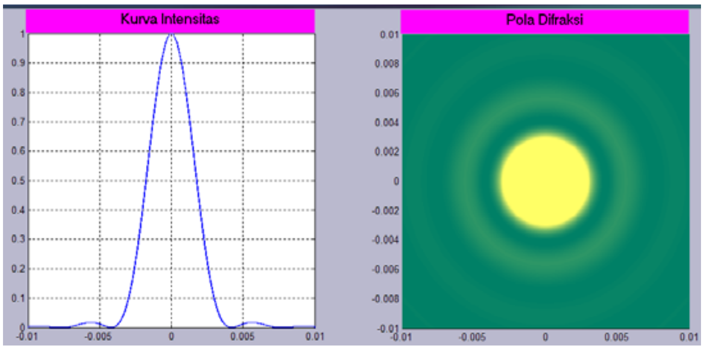
Gambar 1. Flow Chart pemrograman

HASIL DAN PEMBAHASAN

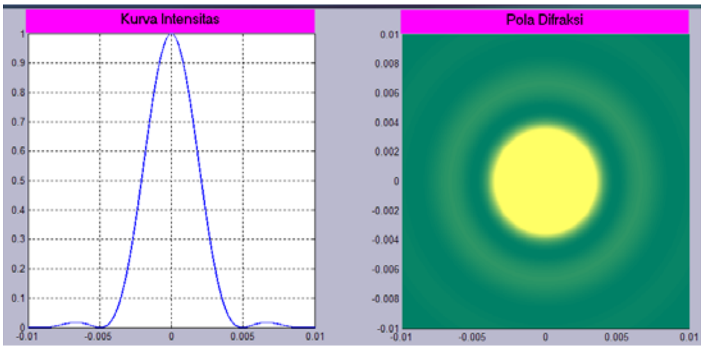
Simulasi persamaan (22) dengan menggunakan aplikasi *Matlab*untuk pengaruh perubahan panjang gelombang terhadap pola difraksi dengan lebar celah sebesar 0,08 mm :



Gambar 2a. panjang gelombang λ = 450 nm

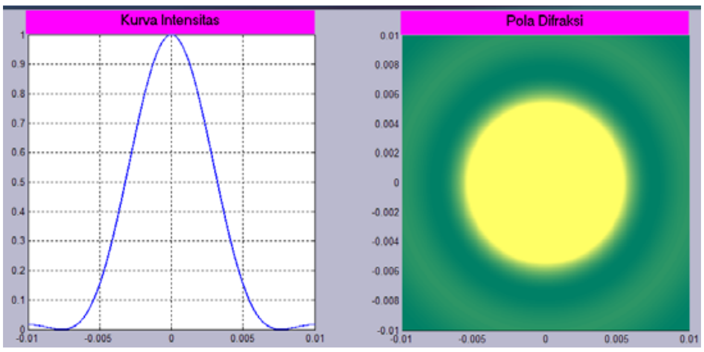


Gambar 2b. panjang gelombang λ = 550 nm

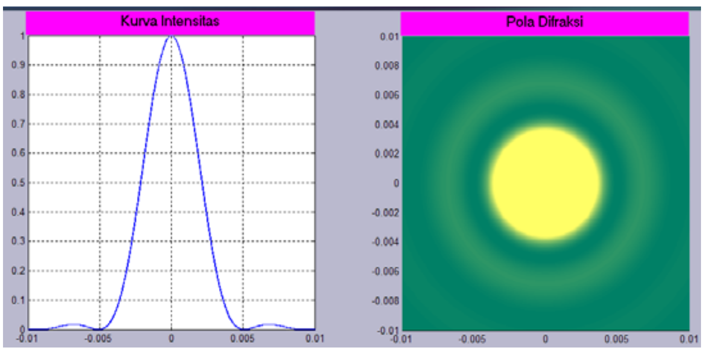


Gambar 2c. panjang gelombang λ = 650 nm

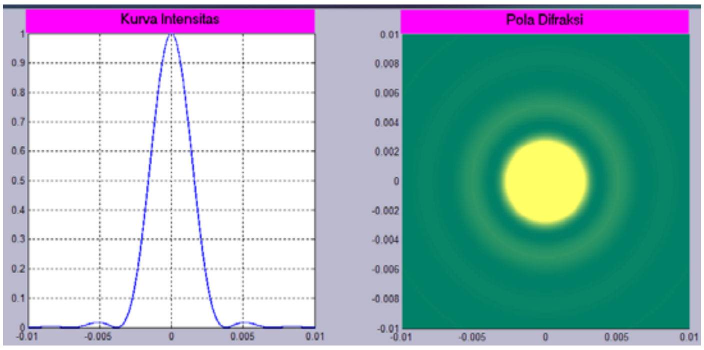
Simulasi persamaan (22) dengan menggunakan aplikasi *Matlab*untukpengaruh perubahan jari-jari celah terhadap pola difraksi, variasi jari-jari celah menggunakan rentang antara 0,04 mm – 0,08 mm dan panjang gelombang sebesar 500 nm.



Gambar 3a. jari-jari celah a = 0,04mm



Gambar 3b. jari-jari celah a = 0,06 mm



Gambar 3c. jari-jari celah a **= 0,08 mm**

Hasil simulasi menunjukan bahwa setelah dilakukan modifikasi fungsi Bessel pada persamaan intensitas Difraksi Fraunhofer celah lingkaran, pola difraksi yang ditampilkan tidak mengalami perubahan.

KESIMPULAN

Perhitungan analitik pada persamaan intensitas Difraksi Fraunhofer celah lingkaran berhasil memodifikasi fungsi Bessel 1 menjadi fungsi Bessel 0 *plus* fungsi Bessel 2 dan pada tahap simulasi menggunakan aplikasi *Matlab*diperoleh kurva intensitas dan visualisasipola difraksi.Kurva intensitas dan visualisasipola difraksimenunjukan semakin besar jari-jari celah, maka pola difraksi yang dihasilkan semakin sempit. Dan semakin besar panjang gelombang sumber cahaya, maka pola difraksi yang dihasilkan semakin lebar.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih peneliti sampaikan kepada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

DAFTAR PUSTAKA

Jenkins, F. & White, H. *Fundamentals of Optics, Fourth Edition*. New York: McGraw-Hill Primis

Eugene Hecht. (1987). *Optics*, Second Edition. Canada: Addison-Wesley Publishing Company.

Bruno Rossi. (1962). *Optics*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Robert, D. Guenther. (1990). *Modern Optic*. New York: John Wiley and Sons.

Boas, M. L. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. New York: John Wiley and Sons.