**Metode Iterasi Tiga Langkah untuk Menyelesaikan Persamaan NonLinear dengan Menggunakan Matlab**

**Deasy Wahyuni1 , Elisawati2**

1 *Teknik Informatika*, 2*Sistem Informasi,*

*Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer (STMIK) Dumai*

e-mail: [deasywahyuni1@gmail.com](mailto:deasywahyuni1@gmail.com), [elisawati06@gmail.com](mailto:elisawati06@gmail.com)

**Abstract**

*Newton method is one of the most frequently used methods to find solutions to the roots of nonlinear equations. Along with the development of science, Newton's method has undergone various modifications. One of them is the hasanov method and the newton method variant (vmn), with a higher order of convergence. In this journal focuses on the three-step iteration method in which the order of convergence is higher than the three methods. To find the convergence order of the three-step iteration method requires a program that can support the analytical results of both methods. One of them using the help of the matlab program. Which will then be compared with numerical simulations also using the matlab program.*

**Keywords** : *newton method, newton method variant, Hasanov Method and order of convergence*

**Abstrak**

*Metode Newton adalah salah satu metode yang paling sering digunakan untuk menemukan solusi untuk akar persamaan nonlinear. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, metode Newton telah mengalami berbagai modifikasi. Salah satunya adalah metode hasanov dan varian metode newton (vmn), dengan tatanan konvergensi yang lebih tinggi. Dalam jurnal ini berfokus pada metode iterasi tiga langkah di mana urutan konvergensi lebih tinggi dari tiga metode. Untuk menemukan urutan konvergensi dari metode iterasi tiga langkah memerlukan program yang dapat mendukung hasil analitik dari kedua metode. Salah satunya menggunakan bantuan program matlab. Yang kemudian akan dibandingkan dengan simulasi numerik juga menggunakan program matlab.*

***Kata kunci*** *: metode newton, varian metode newton, Metode Hasanov dan urutan konvergensi*

1. **PENDAHULUAN**

STMIK Dumai merupakan salah satu perguran tinggi berbasis komputer di kota Dumai yang menghasilkan lulusan yang ahli didalam bidang ilmu komputer. Ini merupakan salah satu bentuk dukungan terhadap visi misi pemerintah untuk mencerdaskan kehidupan bangsa sesuai dengan pembukaan UUD 1945. Para lulusan ini diharapkan mampu mengembangkan ilmu pengetahuan yang mereka miliki.

Terutama di program studi Teknik Informatika, para mahasiswa dituntut untuk dapat mengaplikasikan ilmu yang didapat dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah menyelesaikan persamaan-persamaan matematika menggunakan aplikasi komputer.

Salah satu mata kuliah yang mengaplikasikan persamaan-persamaan dalam bentuk algoritma adalah analisa numerik. Untuk menemukan solusi akar-akar pada persamaan numerik dibutuhkan beberapa metode untuk menemukan orde konvergensi yang lebih tinggi.

Mencari akar-akar dari persamaan nonlinear

# ...(1.1)

# Merupakan hal yang umum dan sangat penting di dalam sains dan teknologi. Dalam menyelesaikan persamaan nonlinear dapat dilakukan dengan analitik dan numerik. Metode analitik dalam menentukan akar persamaan nonlinear terkadang mengalami kesulitan dalam menggunakannya. Oleh karena itu satu hal yang mungkin adalah dengan mendapatkan solusi aproksimasi yang mana solusi ini bergantung pada teknik numerik yang berdasarkan metode iterasi.

Salah satu metode numerik yang sering digunakan dalam pencarian akar adalah metode Newton. Metode ini paling sering digunakan karena sangat efisien dan kekonvergenannya kuadratik atau konvergen berorde dua. Secara umum bentuk iterasi metode Newton adalah :

   . ...(1.2)

Dengan semakin berkembangnya ilmu pengetahuan metode Newton pun telah mengalami berbagai modifikasi. Salah satunya adalah metode hasanov dan Varian Metode Newton (VMN). Kedua metode ini memiliki kekonvergenan yang lebih tinggi dari pada metode newton.

Selanjutnya untuk mengembangkan metode newton, metode hasanov dan Varian Metode Newton (VMN) di temukanlah sebuah Metode Iterasi Tiga Langkah. Dimana metode ini merupakan gabungan dari metode newton, metode hasanov dan Varian Metode Newton (VMN).

1. **TINJAUAN PUSTAKA**

**Metode Iterasi**

1. Metode Newton (Atkinson, 1989)

 ...(2.1)

**Teorema 2.4**(Cheney, W. and Kincaid, 1994)**.** Misalkan fungsi  mempunyai turunan  dan  yang kontinu dan  merupakan akar sederhana dari  maka  Jika  cukup dekat ke  metode Newton konvergen kuadratik ke . Artinya bahwa dalam setiap error yang berurutan, error memenuhi persamaan yang berbentuk

 ...(2.2)

dengan  (Bukti:lihat (Cheney, W. and Kincaid, 1994))

1. Metode VNM (Weerakon, S. and Fernando, 1998)

Untuk mengaproksimasi metode newton agar mendekati akar  pada persamaan non linear , dimulai dengan aproximasi awal yaitu  yang dekat ke  dan menggunakan skema titik iterasi yang sesuai dengan persamaan (2.4) yaitu:

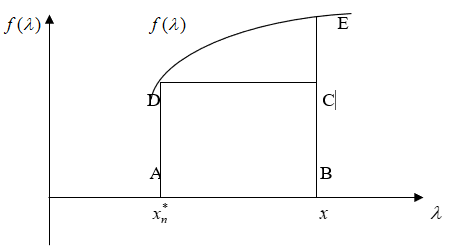
 ...(2.3)

dimana adalah iterasi ke-n.

Model persamaan linear local dari persamaan (2.3) adalah sebagai berikut:

 ...(2.4)

Gambar untuk Model persamaan linear local dari persamaan (2.4) adalah sebagai berikut:



**Gambar 2.1 Aproximasi daerah pada trapesium ABED**

Dari gambar 2.1 di aproximasi integral tak hingga pada trapesium ABED ke persamaan (2.4) didapat:

 ... (2.5)

Dari persamaan (2.17) didapat titik iterasi selanjutnya sebagai akar adalah:

 ...(2.6)

Peramaan (2.6) ini lah yang disebut Varian Metode Newton (VMN).

1. Metode Hasanov (Hasanov, V.I., Ivanov, I.G. and Nedzhibov, 2002)

Jika metode newton pada persamaan (2.1) disusun ulang didapat:



atau



Jika  maka diperoleh



Jika , maka

 ...(2.7)

Pandang  pada persamaan (2.7) sebagai turunan pertama dari fungsi pada titik . Secara limit  dapat ditulis sebagai berikut :

 ...(2.8)

Untuk  yang cukup kecil maka  dapat diaproksimasikan menjadi :

 ...(2.9)

Jika , maka akan diperoleh:

 ...(2.10)

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) ke persamaan (2.8), maka diperoleh

 ...(2.11)

Pandang  pada persamaan (2.11), berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus untuk integral,  dapat ditulis dengan:



Sehingga persamaan (2.11) menjadi:

 ...(2.12)

Apabila  pada persamaan (2.12) diaproksimasikan dengan aturan Simpson 1/3, yaitu:

 ...(2.13)

Karena  pada persamaan (2.12) dihampiri oleh persamaan (2.13), maka hampiran fungsi yang dinotasikan sebagai , dapat ditulis dengan :

 ...(2.14)

Solusi  dari persamaan  adalah :





 ...(2.15)

Dari persamaan (2.15) terlihat untuk menentukan nilai  pada ruas kiri, diperlukan nilai turunan fungsi pada titik  dan . Dengan mengganti  pada ruas kanan dengan , dan menggunakan metode Newton maka diperoleh

 ...(2.16.a)

Sehingga



Misalkan , …(2.16.b)

maka persamaan (2.15) menjadi:



 ...(2.16.c)

Persamaan (2.16.a.b.c) dinamakan dengan metode Hasanov.

1. **METODE PENELITIAN**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode newton, metode VMN metode hasanov dan metode iterasi tiga langkah.

* 1. **Kerangka Kerja**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode newton, metode VNM dan metode hasanov. Penggabungan dari ketiga metode tersebut inilah yang dinamakan metode iterasi tiga langkah. Yang mana bentuk Persamaan Metode Iterasi Tiga Langkah tersebut adalah :

  ...(3.1)  ...(3.2)

 ...(3.3)

Untuk menemukan solusi yang dekat ke hampiran akar dari suatu persamaan nonlinear dengan menggunakan Metode Iterasi Tiga Langkah maka diperlukan beberapa tahapan, yang mana tahapan atau langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

Langkah 1: menentukan Solusi *zn* dari persamaan (3.1)

Langkah 2: Hasil dari persamaan (3.1) disubstitusikan pada persamaan (3.2)

Langkah 3 : Hasil dari Persamaan (3.2) di substitusikan ke persamaan (3.3)

Demikian selanjutnya sampai solusi mendekati akar dengan error yang sangat kecil

1. **HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini dibahas mengenai proses terbentuknya metode iterasi baru tiga langkah, kekonvergenan dari metode iterasi tiga langkah serta simulasi numerik dengan menggunakan program Matlab.

**4.1 Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Kekonvergenan Berorde Enam**

Dalam metode ini untuk menemukan akar dari persamaan (3.1), (3.2) dan (3.3) digunakan beberapa langkah. Yang selanjutnya disebut dengan persamaan Metode Iterasi Tiga Langkah

**4.2 Kekonvergenan Metode Iterasi Tiga Langkah**

**Teorema 3.1** Misalkan  adalah akar sederhana dari fungsi  yang terdiferensialkan secukupnya pada interval terbuka di . Jika  adalah cukup dekat ke  maka persamaan (3.1), (3.2) dan (3.3) memiliki orde konvergensi enam.

**Bukti:**

Misalkan  adalah akar sederhana dari , maka  Misalkan  dan  terdifferensialkan secukupnya, dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk  disekitar

 …(4.1)

Karena , dan misalkan  maka persamaan (4.1) menjadi :



 ...(4.2)

Bila dinyatakan  untuk  sehingga persamaan (4.2) menjadi:



 …(4.3)

Jika disederhanakan persamaan (4.3) menjadi:

 ...(4.4)

Selanjutnya dengan cara yang sama didapat:







 …(4.5)

Kemudian persamaan (4.4) dibagi dengan persamaan (4.5) sehingga didapat:







 …(4.6)

Sekarang perhatikan bahwa persamaan (3.2) dapat ditulis menjadi:

 ...(4.7)

Selanjutnya ekspansi Taylor dari  disekitardidapat:





. …(4.8)

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.7), diperoleh:







 …(4.9)

Dengan cara yang sama didapat:





 …(4.10)

Kemudian persamaan (4.4) dikalikan 2 sehingga diperoleh :



 …(4.11)

Selanjutnya persamaan (4.5) ditambahkan dengan persamaan (4.10) sehingga diperoleh :













 …(4.12)

Kemudian bagi persamaan (4.11) dengan persamaan (4.12) setelah penyederhanaan di dapat :







 …(4.13)

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (4.13) ke persamaan (3.2) sehingga diperoleh :





 …(4.14)

Selanjutnya ditentukan ekspansi Taylor untuk  disekitar  diperoleh:

1. 
2. 

 …(4.15)

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (4.14) ke (4.15) dan mengingat  setelah penederhanaan diperoleh:



  ...(4.16)

Dengan cara yang sama sehingga diperoleh:



 ...(4.17)

Kemudian dihitung  dengan menggunakan persamaan (4.14) dan persamaan (4.6) dan kemudian dikalikan 4, setelah penyederhanaan diperoleh :

1.  
   * + 1. 



 …(4.18)

Persamaan (4.6) dikali dengan 6 didapat:







 …(4.19)

Persamaan (4.10) ditambah persamaan (4.18) dan dijumlahkan dengan persamaan (4.17), diperoleh:









 …(4.20)

Selanjutnya bagi persamaan (4.19) dengan persamaan (4.20), setelah penyederhanaan didapat:







 …(4.21)

Kemudian substitusikan persamaan (4.14) dan persamaan (4.21), setelah penyederhanaan diperoleh:



sehingga



Maka iterasi tiga langkah ini mempunyai konvergensi orde enam.

**4.3 Simulasi Numerik**

Pada subbab ini akan dilakukan simulasi numerik untuk melihat perbandingan Metode Iterasi Tiga langkah dengan Metode Newton, VMN dan Hasanov dengan menggunakan program Matlab. Persamaan nonlinear yang dibandingkan adalah:

1. Fungsi Polinomial: 
2. Fungsi Trigonometri: 
3. Fungsi Polinomial: 
4. Fungsi Trigonometri: 
5. Fungsi Eksponensial: 

Untuk kriteria pemberhentian komputasi digunakan  atau  dengan batas *error* yang diberikan yaitu , sedangkan jumlah iterasi maksimum adalah sebanyak 100 kali.

**Tabel 4.1.** Tabel Hasil Komputasi Metode Newton (N)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Contoh |  | Metode  Newton (N) | |
| Akar |  |
| 1 | 2 | 2.6906474480286138 | 7 |
| 2 | 0.3 | 0.6013467677258198 | 6 |
| 3 | 1.2 | 1.0000000000000000 | 8 |
| 4 | 0.5 | 0.0000000000000000 | 4 |
| 5 | 0.1 | -0.4589622675369485 | 8 |

**Tabel 4.2.** Tabel Hasil Komputasi Metode VMN

| Contoh |  | Metode  VNM | |
| --- | --- | --- | --- |
| Akar |  |
| 1 | 2 | 2.6906474480286138 | 5 |
| 2 | 0.3 | 0.6013467677258198 | 4 |
| 3 | 1.2 | 1.0000000000000000 | 6 |
| 4 | 0.5 | 0.0000000000000000 | 4 |
| 5 | 0.1 | -0.4589622675369485 | 6 |

**Tabel 4.3.** Tabel Hasil Komputasi Metode Hasanov (HN)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Contoh |  | Metode  Hasanov (HN) | |
| Akar |  |
| 1 | 2 | 2.6906474480286138 | 5 |
| 2 | 0.3 | 0.6013467677258198 | 4 |
| 3 | 1.2 | 1.0000000000000000 | 5 |
| 4 | 0.5 | 0.0000000000000000 | 3 |
| 5 | 0.1 | -0.4589622675369485 | 6 |

**Tabel 4.4.** Tabel Hasil Komputasi Metode Iterasi Tiga Langkah (ITL)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Contoh |  | Metode  Iterasi Tiga Langkah (ITL) | |
| Akar |  |
| 1 | 2 | 2.6906474480286138 | 5 |
| 2 | 0.3 | 0.6013467677258198 | 4 |
| 3 | 1.2 | 1.0000000000000000 | 5 |
| 4 | 0.5 | 0.0000000000000000 | 2 |
| 5 | 0.1 | -0.4589622675369485 | 5 |

**Tabel 4.5.** Tabel Hasil Komputasi Perbandingan Metode Newton, VNM, Hasanov dan Metode Iterasi Tiga Langkah

| Contoh |  | N | VNM | HN | ITL |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 7 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 0.3 | 6 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 1.2 | 8 | 6 | 5 | 5 |
| 4 | 0.5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| 5 | 0.1 | 8 | 6 | 6 | 5 |

Jika dilihat kekonvergenan pada nomor 1 sampai 5 kekonvergenan dari Iterasi Tiga Langkah dengan kekonvergenan berorde enam lebih lebih cepat dalam menemukan akar persamaan nonlinear dibandingkan dengan metode Newton, VMN dan Hasanov.

1. **KESIMPULAN DAN SARAN**

**5.1 Kesimpulan**

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa metode iterasi Baru Tiga Langkah dapat diperoleh dengan menggunakan metode Newton untuk langkah pertama, kemudian diikuti dengan langkah pertama metode VMN sebagai langkah kedua metode ini dan langkah ketiga, menggunakan langkah ketiga dari metode Hasanov yang formulasinya diberikan oleh:





Secara analitik ditunjukkan bahwa metode Iterasi Tiga Langkah ini Berorde Enam. Hal ini didukung oleh hasil simulasi numerik. Secara komputasi tidaklah dapat disimpulkan bahwa metode ini lebih efisien karena orde kekonvergenan enam memerlukan perhitungan fungsi enam, sedangkan metode Newton mempunyai orde konvergen dua memerlukan perhitungan fungsi dua.

**5.2. Saran**

Pada jurnal ini digabungkan tiga metode Iterasi yang merupakan bagian dari metode Iterasi lainnya. Teknis yang diterapkan disini dapat juga digunakan untuk kombinasi metode iterasi dari metode iterasi lain yang ada.

1. **DAFTAR PUSTAKA**

Atkinson, K. . (1989). Atkinson, K.E. 1989. Elementary of Numerical Analysis, seconded. John Wiley and Son, New York. *Elementary of Numerical Analysis, Seconded*, (John Wiley and Son, New York).

Cheney, W. and Kincaid, D. (1994). Numerical Mathematics and Computer Third ed. *Numerical Mathematics and Computer Third Ed*, (Brooks / Cole Publishing Company).

Hasanov, V.I., Ivanov, I.G. and Nedzhibov, G. (2002). Hasanov, V.I., Ivanov, I.G. and Nedzhibov, G., 2002, A new modification of Newton’s method. Applications of Mathematics in Engineering, 27, 278–286. *Applications of Mathematics in Engineering*, 278–286.

Weerakon, S. and Fernando, T. G. . (1998). A Variant of Newton’s Method with Accelerated Third-Order Convergence. *A Variant of Newton’s Method with Accelerated Third-Order Convergence*, (Department of Mathematics, University of Sri Jayewardenepura).

A. Rafiq, S. Hussain, F. Ahmad, M. Awais, and F. Zafar, “An efficient three-step iterative method with sixth-order convergence for solving nonlinear equations,” *Int. J. Comput. Math.*, vol. 84, no. 3, pp. 369–375, 2007.