APLIKASI INVERS SEMU (*PSEUDOINVERSE*) DENGAN METODE GREVILLE'S PADA ANALISIS REGRESI LINEAR BERGANDA

Muhtar Safi'i[1], Khurul Wardati[2], Moh. Farhan Qudratullah[2]
[1,2]Prodi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta
[1]email : lapoentang@yahoo.co.id

Abstract

Concept of matrix inverse is limited to $n \times n$ singular matrix. Matrix with $m \times n$ or $n \times n$ a singular concept of inverse matrix solved with pseudoinvers. Pseudoinverse A^+ symbol is a matrix B of any matrix A that meet the 4 traits, namely: $ABA = A$, $BAB = X$, $(BA)^* = BA$, $(AB)^* = AB$, where $(\,)^*$ is the conjugate transpose notation. One of method to find pseudoinverse is Greville's method. A Greville's method is finite iterating method that uses matrix partitions. The amount of iterations this method until n columns of the matrix inverse to search all pseudoinverse. This research will discuss the application and the properties of the estimators of regression coefficients in the multiple linear regression.

Keyword *: Greville's method, Multiple Linear Regression, Pseudoinvers.*

A. PENDAHULUAN

Konsep invers matriks dalam aljabar linear elementer terbatas pada matriks bujur sangkar yang non singular yaitu matriks yang berordo $n \times n$ dan determinan tidak sama dengan nol. Jika suatu matriks A berodo $n \times n$ dan non singular terdapat matriks B sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka B adalah invers dari matriks A atau dengan kata lain bahwa $B = A^{-1}$ (Anton, H & Rorres, C: 2005 :46). Definisi invers tersebut mengakibatkan berlaku juga sifat-sifat $ABA = A$, $BAB = B$, $(BA)^* = BA$, $(AB)^* = AB$ dengan $(\,)^*$ adalah konjugat transpose.

Jenis matriks yang ada bukan hanya matriks yang berodo nxn dan non singular. Misal terdapat matriks P yang berordo $m \times n$ atau matriks berordo $n \times n$ yang singular. Invers matriks tersebut tidak terdefinisi, tetapi dapat ditentukan suatu matriks Q yang seolah-olah menjadi invers atau yang memenuhi beberapa sifat invers matriks :$PQP = P$, $QPQ = Q$, $(QP)^* = QP$, $(PQ)^* = PQ$ dengan $(\,)^*$ adalah konjugat transpose. Suatu matriks Q yang memenuhi empat sifat tersebut maka Q disebut matriks invers semu (*pseudoinvers*) dari matriks P dengan simbol P^{+} (Setiadji , 2006 :4). Cara untuk menentukan invers semu mempunyai berbagai metode, salah satu metode adalah metode Greville's. Metode Greville's adalah metode iterasi yang berhingga dan membutuhkan satu keputusan.

Analisis regresi mempunyai fungsi untuk mencari hubungan dua peubah atau lebih. Analisis regresi yang menggunakan matriks adalah memiliki lebih dari satu variabel. Analisis regresi linear berganda digunakan untuk mengetahui hubungan satu variabel tak bebas (Y) dengan dua atau lebih variabel bebas (X) dengan data kuantitatif. Dalam pembahasannya, analisis regresi linear berganda merupakan bentuk umum dari sistem persamaan linear yaitu :

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh persamaan linear, kemudian didapat persamaan matriks $X'X\beta = X'Y$, sehingga diperoleh estimator dari β adalah $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$. Penelitian ini akan membahas aplikasi dari invers semu (*pseudoinvers*) menggunakan metode Greville's dalam menentukan estimator dari koefisien β dan sifat-sifatnya pada analisis regresi linear berganda.

B. DASAR TEORI

1. Persamaan Linear, Matriks, dan Operasi-Opersainya

Definisi Persamaan Linear (Anton H. , 1987 : 1)

Suatu persamaan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ *dan* b *merupakan konstanta konstanta real disebut persamaan linear dalam* n *peubah.*

Definisi Matriks (Anton H, 1987 :22)

Suatu matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakaan entri dalam matriks dinotasikan dengan a_{ij} *untuk elemen baris ke*$-i$ *dan kolom ke*$-j$.

Misalkan matriks $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Ukuran (ordo) sebuah matriks ditentukan oleh banyaknya baris daan kolom. Karena matriks A tersebut mempunyai m *baris dan* n *kolom , maka matriks A tersebut berukuran* $m \times n$.

Definisi Konjugat Transpose (Anton, H & Rorres, C: Jilid II: 2005: 115-116)

Konjugat tranpose matriks, yang dinotasikan dengan A^* *,didefinisikan sebagai* $A^* = \bar{A}'$ *di mana* $\bar{A}$ *adalah sebuah matriks yang entri-entrinya adalah konjugat-konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks A dan* $\bar{A}'$ *adalah tranpose dari matriks* $\bar{A}$.

Definisi Rank matriks (Goldberg J.L :1991:99)

Rank dari matriks A, *ditulis rank*(A), *adalah banyaknya baris tak nol setelah A dibentuk ke dalam bentuk eselon baris. Suatu matriks* $A_{m\times n}$ *dikatakan mempunyai full column rank jika rank(A)=n dan full row rank jika rank(A)=m.*

Definisi Invers Matriks (Anton, H & Rorres, C: Jilid I, 2005 :46)

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, *maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dinamakan invers (inverse) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan , maka A dinyatakan sebagai matriks singular.*

Sifat Sifat invers matriks (Anton H. , 1987 : 35)

Diberikan A dan B matriks yang mempunyai invers dan mempunyai ordo yang sama berlaku:

i. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ii. A^{-1} *dapat dibalik dan* $(A^{-1})^{-1} = A$

Definisi Matriks Partisi (Hadley, G:1983:68)

Jika kita coret semua kecuali k baris-naris dan s kolom-kolom dari sebuah matriks A $m \times n$, *maka hasilnya matriks* $k \times s$ *disebut matriks bagian dari A.*

2. Analisis Regresi Linear Berganda (Sembiring, R.K :1995 :91-94)

Analisis regresi linear berganda digunakan untuk mengetahui hubungan satu variabel tak bebas (Y) dengan dua atau lebih variabel bebas (X) dengan data kuantitatif. Dalam pembahasannya, analisis regresi linear berganda merupakan bentuk umum dari sistem persamaan linear yaitu :

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

dengan

$\hat{Y}$	= variabel terikat
$X_1, X_2, \dots, X_n$	= variabel bebas ke 1, 2,…, n
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$	= parameter regresi linear berganda ke 1, 2, …,n
ε	= eror pada penaksiran Y

Analisis regresi linear berganda untuk menaksir koefisien menggunakan metode kuadrat terkecil. Koefisien dalam analisis regresi linear berganda ini adalah $\beta_0, \beta_1,$ dan β_n. Menurut metode kuadrat terkecil penaksir tersebut dapat dieproleh dengan meminimumkan bentuk kuadrat.

$$J = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2})^2$$

Nilai minimum tersebut diperoleh dengan mencari turunan dari J terhadap $\beta_0, \beta_1,$ dan β_n dan kemudian menyamakan tiap turunan tersebut dengan nol.

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = -2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2}) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = -2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2})\, X_{i1} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_2} = -2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2})\, X_{i2} = 0$$

Sehingga diperoleh peersamaan normal :

$$n\beta_0 + \beta_1 \sum X_{i1} + \beta_2 \sum X_{i2} = \sum Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_{i1} + \beta_1 \sum {X_{i1}}^2 + \beta_2 \sum X_{i1}X_{i2} = \sum Y_i X_{i1}$$

$$\beta_0 \sum X_{i2} + \beta_1 \sum X_{i1}X_{i2} + \beta_2 \sum {X_{i2}}^2 = \sum Y_i X_{i2}$$

dengan $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$, dan $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$

maka $\mathrm{X'X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum {X_{i1}}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum {X_{i2}}^2 \end{bmatrix}$,

dan $\mathrm{X'Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{22} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{i2}Y_i \end{bmatrix}$

Dari persamaan normal tersebut jika dibentuk matriks, maka persamaan tersebut berbentuk : $\mathrm{X'X}\beta = \mathrm{X'Y}$, sehingga untuk mencari matriks koefisien β adalah $\beta = (\mathrm{X'X})^{-\mathbf{1}}\mathrm{X'Y}$. Asumsi-asumsi analisis regresi linear berganda yaitu :

1. $E[\varepsilon] = 0$.
2. $E[\varepsilon\varepsilon'] = {\sigma_n}^2 I$.
3. X merupakan suatu himpunan bilangan yang tetap meskipun pengamatan dilakukan berulang-ulang.
4. Rank dari matriks X adalah $k < n$, asumsi ini diperlukan untuk $(X'X)$ sebagai matriks non singular.
5.

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

1. Invers Semu (*Pseudoinvers*)

Konsep invers matriks yang sudah dipelajari merupakan konsep invers matriks yang terbatas pada matriks persegi berordo $n \times n$ dan non singular. Matriks yang berordo $m \times n$

atau $n \times n$ yang singular tidak mempunyai invers. Akan tetapi, terdapat matriks yang seolah-olah menjadi invers untuk matriks yang berordo $m \times n$ dan $n \times n$ yang singular. Matriks tersebut dinamakan invers semu (*pseudoinvers*).

Definisi Invers Semu (*Pseudoinvers*) (Setiadji , 2006 : 4)

Diberikan matriks A berukuran $m \times n$ atas bilangan kompleks, suatu matriks X yang memenuhi: *i* $AXA = A$

ii. $XAX = X$

iii. $(XA)^* = XA$

iv. $(AX)^* = AX$

dimana $(\,)^*$ *adalah notasi konjugat transpose dari suatu matriks, disebut invers semu (pseudoinvers) dari matriks A yang dinotasikan* A^+.

Teorema ketunggalan invers semu (Setiadji , 2006 : 13)

Invers semu A^+ *dari matriks A adalah tunggal.*

Sifat invers semu (Boullion T.L. , 1971)

i. $A^+ = A^{-1}$, *jika A matriks berorde $n \times n$ dan nonsingular.*

ii. $(A^+)^+ = A$.

iii. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

iv. *Jika A full coloumn rank, maka* $(A^*A)^{-1}A^*$ *adalah invers semu dari A.*

v. *Jika A full row rank, maka* $A^*(AA^*)^{-1}$ *adalah invers semu dari A.*

2. Metode Greville's

Metode Greville's adalah metode iterasi untuk mencari invers semu yang memartisi matriks menjadi beberapa submatriks. Metode yang mencari ${A_k}^+$ ini sampai k iterasi dengan $k = 1,2,\ldots,n$ dimana A_k adalah submatriks dari matriks A yang terdiri dari k kolom pertama. Anggap A_k terpartisi dalam bentuk (A_{k-1}, a_k) dengan a_k adalah kolom ke k dari matriks A.

Didefinisikan vektor $d_k = {A_{k-1}}^+ a_k$ dan $c_k = a_k - A_{k-1}\, d_k$ **(A.B. Israel dan T.N.E. Greville : 2003 : 263)**. Berikut akan dijelaskan teorema mengenai metode Greville's.

Teorema Metode Greville's (A.B. Israel dan T.N.E. Greville : 2003 : 263)

Untuk sebarang matriks $A \epsilon \mathbb{C}^{m \times n}$, *maka invers semu dari* $A_k (k = 2, 3, \dots, n)$ *adalah*

$$[A_{k-1}\,, a_k]^+ = \begin{bmatrix} {A_{k-1}}^+ - d_k b_k \\ b_k \end{bmatrix}$$

dimana $b_k = {c_k}^+$ *jika* $c_k \neq 0$,

$$b_k = (1 + {d_k}' d_k)^{-1}\, {d_k}'\, {A_{k-1}}^+ \textit{ jika } c_k = 0$$

Langkah-langkah mencari invers semu dengan metode Greville's :

Misal matriks A, dengan

a_k adalah kolom ke *k* dari matriks A.

A_k adalah matriks yang terdiri dari k kolom pertama, maka langkah-langkahnya untuk mencari invers semu dari matriks A adalah :

1. Cari invers semu ${A_1}^+$ dengan rumus ${A_1}^+ = ({A_1}^* A_1)^{-1} {A_1}^*$.
2. Hitung $d_k = {A_{k-1}}^+ a_k$ dan $c_k = a_k - A_{k-1}\, d_k$

   jika $c_k \neq 0$ maka $b_k = {c_k}^+$ dengan ${c_k}^+ = ({c_k}^* c_k)^{-1} {c_k}^*$.

   jika $c_k = 0$ maka $b_k = (1 + {d_k}' d_k)^{-1}\, {d_k}'\, {A_{k-1}}^+$
3. Hitung $B_k = {A_{k-1}}^+ - d_k b_k$

   Sehingga diperolesh invers semu A_k yaitu ${A_k}^+ = \begin{bmatrix} B_k \\ b_k \end{bmatrix}$

Ulangi langkah 2 dan 3 sehingga apabila matriks A berukuran mxn maka sebanyak n langkah.

3. Aplikasi Invers Semu (Pseudoinverse) Pada Analisis Regresi Linear Berganda

Salah satu penggunaan invers semu adalah pada bidang statistika yaitu pada analisis regresi linear berganda. Analisis regresi berganda telah dibahas pada dasar teori bahwa untuk mencari matriks koefisien β adalah $\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$. Karena asumsi dari analisis regresi linear berganda yaitu rank dari matriks X adalah $k < n$, maka matriks tersebut *full coloumn rank*, sedemikian sehingga menurut teorema invers semu tentang $(X'X)^{-1}X' = X^+$, penaksir koefisien β pada persamaan diatas menjadi : $\hat{\beta} = X^+Y$.

Sifat-sifat dari penaksir koefisien β harus memiliki sifat yang baik untuk mendapatkan model yang baik. $\hat{\beta} = X^+Y$ memenuhi sifat penaksir yang baik **(Abdul Azis : 2010 : 19-22)**

a. Linear

$\hat{\beta} = X^+Y$

$= (X'X)^{-1}X'Y$ *full coloumn rank*

$= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$ persamaan regresi

$= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$

$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$ karena $(X'X)^{-1}X'X = I$

$= \beta + X^+\varepsilon$ *full coloumn rank*

Terbukti bahwa persamaan tersebut menunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah fungsi linear dari β dan ε.

b. Takbias (unbiased)

$E(\hat{\beta}) = E\ (\beta + X^+\varepsilon)$

$= E\ (\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon)$ *full coloumn rank*

$= E\ (\beta) + E\ ((X'X)^{-1}X'\varepsilon)$

$= \beta + (X'X)^{-1}X'E\ (\varepsilon)$

$= \beta$ karena $E\ (\varepsilon) = 0$

c. Variasi sampling

$Var\ (\hat{\beta}) = E\ \left[(\hat{\beta} - \beta)^2\right]$

$= E\ \left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\right]$

$$= \begin{bmatrix} E\left[(\hat{\beta}_0-\beta_0)^2\right] & E\left[(\hat{\beta}_0-\beta_0)(\hat{\beta}_1-\beta_1)\right] & \cdots & E\left[(\hat{\beta}_0-\beta_0)(\hat{\beta}_n-\beta_n)\right] \\ E\left[(\hat{\beta}_1-\beta_1)(\hat{\beta}_0-\beta_0)\right] & E\left[(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2\right] & \cdots & E\left[(\hat{\beta}_1-\beta_1)(\hat{\beta}_n-\beta_n)\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left[(\hat{\beta}_n-\beta_n)(\hat{\beta}_0-\beta_0)\right] & E\left[(\hat{\beta}_n-\beta_n)(\hat{\beta}_1-\beta_1)\right] & \cdots & E\left[(\hat{\beta}_n-\beta_n)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var\left(\hat{\beta}_0\right) & Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right) & \cdots & Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_n\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0\right) & Var\left(\hat{\beta}_1\right) & \cdots & Cov\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov\left(\hat{\beta}_n,\hat{\beta}_0\right) & Cov\left(\hat{\beta}_n,\hat{\beta}_1\right) & \cdots & Var\left(\hat{\beta}_n\right) \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut adalah matriks simetri yang mengandung variansi dari penaksir di diagonal matriks dan kovariansi pada elemen lainnya, sehingga matriks tersebut dinamakan matriks Varian-Kovarian dari penaksir kuadrat terkecil. Sedemikian sehingga didapat $Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right]$, kemudian subtitusi $\left(\hat{\beta}-\beta\right)$ dengan $X^{+}\varepsilon$, maka menjadi :

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{\beta}\right) &= E\left[(X^{+}\varepsilon)(X^{+}\varepsilon)'\right] \\ &= E\left[(X^{+}\varepsilon)(X^{+}\varepsilon)'\right] \\ &= E\left[X^{+}\varepsilon\varepsilon'(X^{+})'\right] \\ &= X^{+}E\left[\varepsilon\varepsilon'\right](X^{+})' \\ &= X^{+}{\sigma_n}^2 I(X^{+})' && \text{karena } E\left[\varepsilon\varepsilon'\right] = {\sigma_n}^2 I \\ &= (X'X)^{-1}X'{\sigma_n}^2 I((X'X)^{-1}X')' \\ &= (X'X)^{-1}X'{\sigma_n}^2 IX(X'X)^{-1} \\ &= {\sigma_n}^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} && \text{karena } {\sigma_n}^2 \text{ adalah skalar} \\ &= {\sigma_n}^2(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

Maka didapat $Var\left(\hat{\beta}\right) = {\sigma_n}^2(X'X)^{-1}$

d. Variansi minimum

Penaksir terbaik (*best estimator*) dari semua β dalam vektor $\hat{\beta}$ didapat apabila persamaan $\hat{\beta} = X^{+}Y$ mempunyai variansi terkecil diantara variansi yang lain yang mungkin tidak linear dan takbias. Asumsikan bahwa $\hat{\hat{\beta}}$ adalah penaksir alternatif yang linear dan takbias yang kemudian akan dibuktikan bahwa variansi dari $\hat{\hat{\beta}}$ lebih besar daripada variansi dari $\hat{\beta}$. Anggap $\hat{\hat{\beta}} = [X^+ + B]Y$ dimana B adalah matriks konstanta kxn yang diketahui, sehingga :

$$\hat{\hat{\beta}} = [X^+ + B][X\beta + \varepsilon]$$

$$= (X^+)(X\beta + \varepsilon) + (B)(X\beta + \varepsilon)$$

$$E\left[\hat{\hat{\beta}}\right] = E[(X^+)(X\beta + \varepsilon) + (B)(X\beta + \varepsilon)]$$

$$= E[X^+X\beta + X^+\varepsilon + BX\beta + B\varepsilon]$$

$$= E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + BX\beta + B\varepsilon]$$

$$= \beta + BX\beta \qquad \text{karena } E[\varepsilon] = 0$$

Sebab $\hat{\hat{\beta}}$ telah diasmusikan yang linear dan takbias bagi β, maka $E\left[\hat{\hat{\beta}}\right]$ seharusnya sama dengan β yang berarti bahwa $(BX\beta)$ adalah matriks nol. Jika $\hat{\hat{\beta}} = [X^+ + B]Y$ merupakan penaksir yang takbias, maka dapat dikatakan bahwa $BX = 0$.

Variansi dari $\hat{\hat{\beta}}$ sebagai penaksir alternatif dari β adalah

$$Var\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = E\left[\left(\hat{\hat{\beta}} - \beta\right)\left(\hat{\hat{\beta}} - \beta\right)'\right]$$

$$= E\,[([X^+ + B]Y - \beta)([X^+ + B]Y - \beta)']$$

$$= E\,[([X^+ + B](X\beta + \varepsilon) - \beta)([X^+ + B](X\beta + \varepsilon) - \beta)']$$

$$= E\,[(X^+X\beta + X^+\varepsilon + BX\beta + B\varepsilon - \beta)$$

$$(X^+X\beta + X^+\varepsilon + BX\beta + B\varepsilon - \beta)']$$

$$= E\,[(X^+X\beta + X^+\varepsilon + B\varepsilon - \beta)$$

$$(X^+X\beta + X^+\varepsilon + B\varepsilon - \beta)'] \qquad \text{karena } BX = 0$$

$$Var\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = E\,[((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon - \beta)$$

$$((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon - \beta)']$$

$$= E\,[(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon - \beta)$$

$$(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon - \beta)'] \quad \text{karena } (X'X)^{-1}X'X = I$$

$$= E\,[((X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon)((X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon)']$$

$$= E\,[((X'X)^{-1}X'\varepsilon + B\varepsilon)(\varepsilon'X(X'X)^{-1} + \varepsilon'B')]$$

$$= E\,[((X'X)^{-1}X' + B)\varepsilon\varepsilon'(X(X'X)^{-1} + B')]$$

$$= ((X'X)^{-1}X' + B)E\,[\varepsilon\varepsilon'](X(X'X)^{-1} + B')$$

$$= ((X'X)^{-1}X' + B){\sigma_n}^2 I_n(X(X'X)^{-1} + B')$$

$$= {\sigma_n}^2((X'X)^{-1}X' + B)(X(X'X)^{-1} + B')$$

$$= {\sigma_n}^2((X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + BX(X'X)^{-1}$$

$$+(X'X)^{-1}X'B' + BB')$$

$$= {\sigma_n}^2((X'X)^{-1} + BB') \qquad \text{karena } BX = 0$$

Sehingga diperoleh bahwa $Var\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = {\sigma_n}^2(X'X)^{-1} + {\sigma_n}^2BB'$. Variansi dari penaksir alternatif dari β yaitu $\hat{\hat{\beta}}$ lebih besar dari variansi dari penaksir dari β yaitu $\hat{\beta}$. $Var\left(\hat{\hat{\beta}}\right)$ kelebihan sebesar ${\sigma_n}^2BB'$ daripada $Var\left(\hat{\beta}\right)$. Jadi terbukti bahwa $Var\left(\hat{\beta}\right)$ adalah variansi minimum dari $\hat{\beta}$ atau dengan kata lain bahwa $\hat{\beta}$ merupakan penaksir tebaik (*the best estimator*).

Keempat sifat tersebut membuktikan bahwa persamaan $\hat{\beta} = X^{+}Y$ telah memenuhi sifat estimator baik atau yang biasa disebut BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*). Sifat BLUE tersebut akan berlaku pada matriks X yang *full coloumn rank.*

D. KESIMPULAN

Berdasarkan dari penelitian dan hasil studi literatur yang telah penulis lakukan mengenai aplikasi invers semu (*pseudoinverse*) dengan metode greville's pada analisis regresi linear berganda, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Invers semu (*pseudoinvers*) merupakan perluasan dari konsep invers matriks yang beordo nxn yang nonsingular. Matriks yang berordo mxn atau matriks nxn yang singular dapat diselesaikan menggunakan konsep matriks invers semu.
2. Mencari invers semu bisa dengan berbagai metode. Salah satu metode yang adalah metode Greville's. Metode Greville's merupakan metode iterasi berhingga yang menggunakan matriks partisi. Iterasi metode ini berhingga sampai n kolom dari matriks yang akan dicari invers semunya.
3. Mencari matriks koefisien β dari analisis regresi linear berganda adalah $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$. Asumsi dari analisis regresi linear berganda yaitu rank dari matriks X adalah $k < n$, maka matriks tersebut *full coloumn rank*. Menurut teorema invers semu tentang $(X'X)^{-1}X' = X^{+}$, maka penaksir koefisien β pada persamaan diatas menjadi $\hat{\beta} = X^{+}Y$.
4. Penaksir koefisien β yaitu $\hat{\beta} = X^{+}Y$ memiliki sifat penaksir yang baik atau yang disebut dengan bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) dengan syarat matriks X adalah *full coloumn rank.*

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1981. *Aljabar Linear Elementer*. Bandung: Erlangga.

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Bandung: Erlangga.

Anton, H. and Rorres, C. 2004. *"Aljabar Linear Elementer Jilid I"*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. and Rorres, C. 2005. *"Aljabar Linear Elementer Jilid II"*. Jakarta: Erlangga

Azis, Abdul. 2010. *EKONOMETRIKA Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB.* Malang : UIN-MALIKI PRESS

Ben-Israel, Adi. And Greville, Thomas N.E. 2003. *Generalized Inverses Theory and Aplications*. New York: Spinger-Verlag.

Bouilion, Thomas L. and Odell, Patruck L. 1971. *Generalized Inverse Matrices.* New York: John Wiley&Sons, Inc.

Campbel, Stephen L. and Meyer, Carl D. 1979. *Generalized Inverse of Linear Transformations*. London: Pitman Pub.

Goldberg, J.L. 1991. *Matrix Theory with Applications*. New York: Mc GrawHill, Inc.

Herlambang U, Arif. 2010. *Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisir Pada Jaringan Listrik*. Skripsi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas SAINTEK UIN

Ikhwanudin, Achmad. 2007. *Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisasi pada Cipher Hill*. Skripsi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Lains, Alfian. 2003. *EKONOMETRIKA TEORI DAN APLIKASI Jilid 1*, Jakarta : LP3ES

Misshobah Munir Rahayu, Ida. 2008. *Matriks Invers Moore-Penrose dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear*. Skripsi. Semarang : UNDIP.

Rencher, Alvin C., 1934, *Methods of multivariate analysis 2nd ed-2002*, New York : A Wiley-Interscience publication.

Saryono, Joko, 2009. *Metode Greville's Untuk Menentukan Invers Moore Penrose Dan Implementasinya Dengan Bahasa Pemrograman C.* Skripsi. Semarang : UNDIP.

Sembiring, RK. 2003. *Analisis Regresi Edisi Kedua*. Bandung : ITB

Setiadji. 2006. *Matriks Invers Tergeneralisasi*. Yogyakarta: Pascasarjana UGM.

Setiadji. 2008. *Aljabar Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Supranto, J., 1998, *Pengantar Matriks*, Jakarta: PT Rineka Cipta