Kaunia, Vol. IX, No. 2, Oktober 2013
ISSN (online): 2301-8550

MELUKIS GRAFIK FUNGSI YANG RUMIT DENGAN MUDAH

Faiz Ahyaningsih

Dosen FMIPA Matematika UNIMED

Abstract

This paper aim how to sketch the complicated curve y = f(x) easily. Before it we must know about the domain, range, discontinuity, symmetry, intercepts, extent, critical points, concavity, and asymptotes. The behavior of curve over the x where no f'(x) is observed, also odd function and even function. That's many aspect of sketching curve.

Keywords: *Graph of Function, Domain, Range, Asymptotes*

1. PENDAHULUAN

Dua orang Perancis telah berjasa untuk gagasan tentang sistem koordinat. Pieree Fermat adalah seorang pengacara yang menggemari matematika. Pada tahun 1629 dia menulis sebuah makalah yang pada dasarnya menggunakan koordinat untuk memberikan titik dan kurva. Sedangkan Rene Descartes adalah seorang ahli filsafat yang berfikir bahwa matematika dapat membuka kunci rahasia alam semesta. Ia menerbitkan La Geometric pada tahun 1637. Buku ini sangat terkenal dan walaupun memang menekankan peranan aljabar dalam memecahkan masalah-masalah geometri., orang hanya menjumpai suatu petunjuk tentang koordinat di sana.

Berdasarkan siapa yang mempunyai gagasan pertama kali, Fermatlah yang sepantasnya memperoleh pengakuan yang utama. Sejarah dapat merupakan teman yang plin-plan, dan sekarang koordinat dikenal sebagai koordinat Cartesius, yang dinamakan sesuai nama Rene Descartes.

Pada bidang, koordinat Cartesius dapat kita umpamakan pada sebuah titik yang terletak dalam bidang koordinat tersebut, dimana koordinat-koordinat suatu titik adalah alamat titik itu, dan apabila kita telah menemukan alamat titik tersebut maka dengan mudah kita dapat menemukan lokasinya dengan membaca alamat titik tersebut.

Koordinat Cartesius inilah yang sekarang digunakan untuk menggambar grafik-grafik fungsi. Selama 15 tahun penulis mengajar Kalkulus, mengambar grafik selalu merupakan momok bagi sebagian besar, bahkan hampir seluruh mahasiswa, untuk itu penulis ingin berbagi dengan seluruh pembaca tentang bagaimana menggambar grafik fungsi yang tidak sederhana dengan mudah, (grafik yang sederhana tidak dibicarakan di sini).

2. PEMBAHASAN

2.1. Persiapan-Persiapan Dasar Cara untuk Melukis Grafik Fungsi yang Rumit dengan Mudah

Ketika di SMU, tentunya telah dipelajari, bagaimana melukis grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat, demikian juga dengan grafik fungsi-fungsi trigonometri. Kemudian di tingkat

Universitas, tentunya telah diperkenalkan beberapa grafik fungsi dengan bentuk persamaan yang sedikit lebih rumit. Sekarang, bagaimanakah cara melukis grafik fungsi yang mempunyai persamaan yang rumit, tidak sederhana? Sebagai contoh, bagaimana melukis grafik fungsi-fungsi:

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$G(x) = a\, e^{-1/2\ x^2}\, dan$$

$$H(x) = \frac{x^2+2x+1}{x} \quad ?$$

Juga fungsi-fungsi

$$f(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(5-x)} \quad dan$$

$$g(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$$

yang kelihatan lebih rumit lagi, serta bagaimana melukis grafiknya, persiapan-persiapan, penyelidikan-penyelidikan dan analisis apakah yang diperlukan untuk dapat melukis grafik fungsi-fungsi tersebut.

Secara umum, untuk melukis grafik suatu fungsi diperlukan pengetahuan tentang:

1) Domain atau daerah definisi fungsi tersebut
2) Titik-titik tak kontinu
3) Titik-titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat.
4) Daerah atau himpunan nilai-nilai x dimana f(x) positif atau negatif.
5) Daerah dimana f(x) naik dan daerah dimana f(x) turun.
6) Maksimum/minimum relative, daerah dimana kurva f cembung ke bawah atau dapat juga dikatakan cekung ke atas. serta koordinat titik baliknya.
7) Daerah dimana kurva f cembung ke atas, atau dapat juga dikatakan kurva f cekung ke bawah, serta koordinat titik baliknya.
8) Persamaan-persamaan asimtot.
9) Kelakuan fungsi f di sekitar titik-titik x dimana f' (x) tidak ada.
10) Fungsi genap/ganjil

Domain atau daerah definisi suatu fungsi diperlukan agar kita dapat mengetahui dimana grafik fungsi tersebut berada. Titik-titik tak kontinu dari suatu fungsi memberikan petunjuk kepada kita dimana grafik fungsi tersebut putus, sedangkan perpotongan grafik dengan sumbu-sumbu koordinat jelas merupakan titik-titik penting.

Daerah atau himpunan nilai-nilai x dimana f(x) positi/negatif memberikan petunjuk kepada kita apakah grafik fungsi tersebut terletak di atas sumbu x ataukah di bawah sumbu x, dan daerah dimana fungsi f naik/turun menentukan arah grafik fungsi tersebut, dan dapat ditentukan berdasarkan tanda dari f' (x).

Maksimum relatif dan minimum relatif suatu fungsi jelas merupakan titik-titik yang sangat penting untuk diketahui. Daerah dimana kurva f cembung ke atas/ cekung ke bawah maupun daerah dimana kurva f cembung ke bawah/ cekung ke atas, akan menentukan bentuk dari grafik tersebut, yaitu cembung ke bawah ataukah cekung ke bawah, dan ini ditentukan berdasarkan tanda dari f'' (x).

Asimtot pada suatu kurva f akan memberikan petunjuk kepada kita bagaimana kelakuan kurva tersebut di titik-titik yang terletak jauh sekali mendekati tak berhingga. Kelakuan fungsi f di sekitar titik-titik tak kontinu perlu diketahui untuk melihat dimana grafik fungsi tersebut putus, yaitu di titik berhingga ataukah di titik yang berada jauh tak berhingga, dan ini diselidiki dengan menghitung limit kiri dan limit kanan fungsi f di titik tersebut. Akhirnya kelakuan fungsi f di sekitar titik-titik x dimana f' (x) tidak ada, ini juga perlu diselidiki, untuk melihat bentuk grafik fungsi f disekitar titik tersebut, yaitu runcing ataukah tidak. Hal ini diselidiki dengan menghitung limit kiri dan limit kanan f' (x) di titik tersebut.

Dalam fungsi ganjil berlaku hal sebagai berikut : f(-x) = - f(x) untuk semua x. Grafik dari fungsi ganjil, simetris terhadap titik pusat O.

Dalam fungsi genap berlaku hal sebagai berikut : f(-x) = f(x) untuk semua x. Grafik dari fungsi genap, simetris terhadap sumbu y.

2.2. Contoh - Contoh

Contoh 2.2.1. Lukislah grafik fungsi F dengan persamaan

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Khususnya carilah daerah dimana fungsi F naik dan daerah dimana F turun; maksimum dan minimum relatif : daerah dimana kurva F cembung ke bawah, F cekung ke bawah; koordinat titik balik dan persamaan asimtotnya.

Jawab:

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2}, kontinu\ untuk\ semua\ x.$$

Grafik F memotong sumbu x , di titik x = 0 (karena jika F(x) = 0, maka x = 0). dan memotong sumbu y, di titik y = 0 (karena jika x = 0, maka F(x) = y = 0. $F(x) > 0$ jika $x > 0$ dan $F(x) < 0$ jika $x < 0$. Ini berarti bahwa grafik fungsi F terletak di atas sumbu x pada daerah $x > 0$ dan terletak di bawah sumbu x pada daerah $x < 0$.

$$F'(x) = \frac{1+x^2-x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$F'(x) = 0$ jika $x = 1$ atau jika $x = -1$. Titik-titik kritis fungsi F adalah $x_1 = 1$ dan $x_2 = -1$.

$F'(x) > 0$ jika $-1 < x < 1$ dan $F'(x) < 0$ jika $x < -1$ atau $x > 1$. Jadi fungsi F naik pada interval $[-1,1]$, turun pada daerah $x \leq -1$ dan daerah $x \geq 1$. Karena F Kontinu untuk semua x, pada khususnya di titik-titik $x_1 = 1$ dan $x_2 = -1$, maka F mempunyai maksimum relatif di titik $x_1 = 1$ dengan nilai $F(1) = 1/2$ dan mempunyai minimum relatif di titik $x_2 = -1$ dengan $F(-1) = -1/2$.

Dari $F'(x) = (1-x^2)(1+x^2)^{-2}$, maka

$$F''(x)$$

$$= -2x(1+x^2)^{-2} + (1-x^2)(-2)(1+x^2)^{-3}(2x)$$

$$= \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$$

$F''(x) = 0$ jika x = 0 atau $x = -\sqrt{3}$ atau $x = \sqrt{3}$

Berdasarkan tanda dari faktor-faktor dari $F''(x)$, maka $F''(x) > 0$ jika $-\sqrt{3} < x < 0$ atau $x > \sqrt{3}$, $F''(x) < 0$ jika $x < -\sqrt{3}$ atau $0 < x < \sqrt{3}$. Jadi : kurva F cembung ke atas pada daerah-daerah $x < -\sqrt{3}$ dan $0 < x < \sqrt{3}$. Absis titik-titik balik $x = -\sqrt{3}$ dan $x = \sqrt{3}$ serta $x = 0$

$$F(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{4}, \quad F(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad F(0) = 0$$

Titik balik kurva F adalah $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ dan (0,0), dan

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Jadi, garis y = 0 adalah asimtot datar pada kurva F, pada arah ke kiri maupun ke kanan.

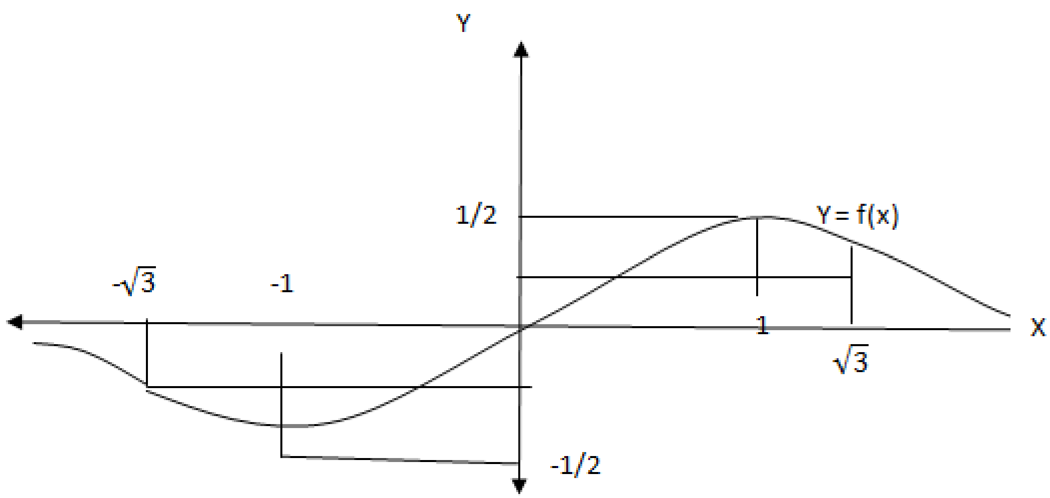
Pemeriksaan tentang ganjil/genapnya fungsi tersebut di dapat :

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$F(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -F(x)$$

Jadi fungsi ini adalah fungsi ganjil, sehingga grafik simetris terhadap titik O

Dari rangkuman hasil analisis di atas, maka grafik fungsi F terlukis seperti dalam gambar di bawah ini:



Langkah-langkah dalam melukiskan grafik fungsi F tersebut adalah sebagai berikut :

1. Gambarkan salib sumbu koordinat.
2. Gambarkan titik-titik penting pada kurva F, yaitu (0,0). Titik minimum $(-1,-1/2)$, titik maksimum $(1,1/2)$ dan titik-titik balik $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
3. Lukiskan grafik fungsi F dengan mengingat daerah-daerah dimana F naik/turun, daerah-daerah dimana F cembung ke bawah, cembung ke atas, kesimetrian, serta asimtot pada kurva F, seperti gambar di atas.
4. Karena F fungsi ganjil, maka grafik simetris terhadap titik asal O

Contoh 2.2.2. Lukislah grafik fungsi f

$$f(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(5-x)}$$

dengan lebih dahulu menentukan:

a) Titik tak kontinu fungsi f, titik-titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat dan daerah dimana f(x) positif/negatif.
b) Daerah dimana fungsi f naik/turun, serta maksimum relatif dan minimum relatif fungsi f.
c) Asimtot pada kurva f.
d) Memeriksa apakah f merupakan fungsi ganjil/genap.

Jawab:

$$a)\ f(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(5-x)}$$

Tak kontinu di titik x = 5, kontinu di setiap titik x yang lain. Di titik x = 0, f(0) = 1/5. Dan f(x) = 0 di titik x = -1. Jadi

Kaunia, Vol. IX, No. 2, Oktober 2013: 47-52
ISSN (online): 2301-8550

grafik fungsi f memotong sumbu x di titik (-1,0) dan memotong sumbu y di titik (0, 1/5).

Tanda dari f(x):

Faktor $(x+1)$	- - - - - - -		+ + + + + +		+ + + + +
Faktor e^{-x}	+ + + + +		+ + + + + +		+ + + + +
Faktor $(5-x)$	+ + + + +		+ + + + + +		- - - - - - -
f(x)	- - - - - -		+ + + + + +		- - - - - -
		-1		5	

Jadi $f(x) > 0$ (yang berarti grafik di atas sumbu X), jika $-1 < x < 5$, dan $f(x) < 0$ (yang berarti grafik di bawah sumbu X), jika $x < -1$ atau jika $x > 5$.

b) $f'(x) = \dfrac{(5-x)[e^{-x}-(x+1)e^{-x}]-(x+1)e^{-x}(-1)}{(5-x)^2}$

$= \dfrac{(x^2-4x+1)e^{-x}}{(5-x)^2}$

$= \left(x-(2-\sqrt{3})\right)\left(x-(2+\sqrt{3})\right)\dfrac{e^{-x}}{(5-x)^2}$

$f'(x)$ tidak ada di titik x = 5, $f'(x) = 0$ jika $x = 2+\sqrt{3}$ atau $x = 2-\sqrt{3}$ tanda dari $f'(x)$ di titik-titik yang lain:

Faktor $(x-(2-\sqrt{3}))$	- - - - -		+ + + + +		+ + + +
Faktor $(x-(2+\sqrt{3}))$	- - - - -		- - - - - - - -		+ + + +
Faktor $\frac{e^{-x}}{(5-x)^2}$	+ + + + +		+ + + + + +		+ + + +
$f'(x)$	+ + + + +		- - - - - -		+ + + +
		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	

Jadi $f'(x) > 0$ jika $x < 2-\sqrt{3}$ atau jika $x > 2+\sqrt{3}$: $f'(x) < 0$ jika $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$.

Berdasarkan ini maka:

Fungsi f naik pada daerah $x \leq 2-\sqrt{3}$, dan $x > 2+\sqrt{3}$

Fungsi f turun pada daerah $2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$.

Fungsi f mempunyai maksimum relatif di titik $x = 2-\sqrt{3}$ dengan nilai

$f(2-\sqrt{3}) = \dfrac{\left((3-\sqrt{3})\,e^{-2+\sqrt{3}}\right)}{(3+\sqrt{3})}$ = 0,205 dan mempunyai minimum relatif di titik $x = 2+\sqrt{3}$ dengan nilai

$f(2+\sqrt{3}) = \dfrac{\left((3+\sqrt{3})e^{-2-\sqrt{3}}\right)}{(3-\sqrt{3})}$ = 0,089

c) *karena* $\lim_{x\to 5} F(x) = \lim_{x\to 5}\dfrac{(x+1)e^{-x}}{5-x} = \infty,$

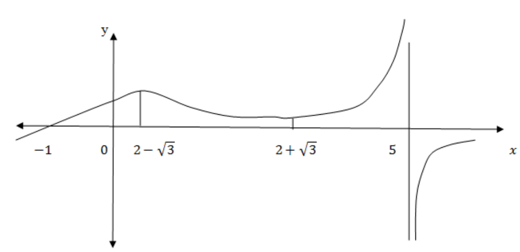
Maka garis x = 5 adalah asimtot tegak pada kurva f. disamping itu, karena

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)e^{-x}}{5-x} = 0,$$

Maka garis y = 0 adalah asimtot datar pada kurva f.

Mengenai fungsi genap/ganjilnya, dapat diperiksa bahwa fungsi tersebut bukan fungsi genap dan bukan pula fungsi ganjil, karena f(-x) ≠ f(x) dan f(-x) ≠ -f(x)

Dengan merangkum semua hasil analisis di atas, maka grafik fungsi f akan terlukis seperti gambar di bawah ini :



3. RANGKUMAN

Untuk menggambar grafik suatu fungsi f diperlukan pengetahuan tentang:

3.1 Domain fungsi f
3.2 Titik-titik tak kontinu
3.3 Titik-titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat
3.4 Daerah dimana f(x) positif/negatif
3.5 Daerah dimana f(x) naik/turun
3.6 Maksimum relatif dan minimum relatif fungsi f
3.7 Daerah dimana kurva f cembung/cekung ke bawah
3.8 Persamaan-persamaan asimtot
3.9 Kelakuan fungsi f di sekitar titik-titik tak kontinu dan di sekitar titik-titik x dimana $f^1(x)$ tidak ada.
3.10 Fungsi genap/ ganjil

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres Frank, (1972), Jr. Theory and Problem's of Calculus. Me Graw Hill Book Co.

[2] Leithold, L., (1976), The Calculus With Analytie Geometry. New York : Harper and Row Publishere.

[3] Piskunow, N., (1969), Differential and Integral Calculus. Moscow : Mir Publishers.

[4] Sardjono, (1984/1985), Matematika I, Depdikbud. Universitas Terbuka.

[5] Thomas, George, (1961), Calculus 2nd Edition. Addision – Weley Publishing Co., Inc.