J. Kaunia Vol. X No. 2, Oktober 2014/1435: 152-164
ISSN 1829-5266 (print) ISSN 2301-8550 (online)

PENERAPAN METODE SWEEP PADA MASALAH PERMAINAN DINAMIS LINEAR KUADRATIK SISTEM DESKRIPTOR

Muhammad Wakhid Musthofa

Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta,
mwakhid_m@yahoo.com

Abstract

This paper describes the applications of sweep method in constructing a Riccati differential equation arising in the linear quadratic differential game for descriptor systems. This equation is needed in order to find the saddle-point equilibria that be a solution for the game. To find the saddle-point equilibria the game is transformed into a reduced nonsingular game. Within a transformed game the method is applied to construct the desired Riccati equation.

Keywords: *sweep method, Riccati differential equation, linear quadratic differential game, descriptor systems.*

A. Pendahuluan

Metode sweep (*sweep method*) diperkenalkan oleh Jean-Jaques Moreau sekitar tahun 1970. Pada awalnya, metode ini digunakan sebagai alat untuk memodelkan sistem mekanik elastoplastik (*elastoplastic mechanical systems*) (Moreau 1974). Selain itu, Moreau juga memperkenalkan metode *sweep* sebagai suatu masalah evolusi pada sebuah ruang Hilbert (Moreau 1977). Pada masalah *linear quadratic regulator* (LQR), metode *sweep* telah berhasil digunakan untuk menurunkan persamaan diferensial Riccati yang berperan penting dalam mencari kendali optimal bagi sistem yang ingin dikendalikan. Metode ini bekerja dengan prinsip berbekal pada hubungan antara variabel *state* dan *costate* pada waktu akhir (*terminal time*) maka dapat ditunjukkan hubungan tersebut juga berlaku pada keseluruhan waktu ketika sistem bekerja. Referensi terkait dengan hal ini dapat dilihat di Bryson dan Ho (1975), Lewis (1995), Kirk (1998) dan Vinter (2000).

Pengembangan aspek matematis metode *sweep* banyak ditemukan pada masalah pertubasi suatu sistem dinamik yang variabel *state*nya bergantung pada himpunan yang bergerak, perlemahan masalah regularitas dan pelonggaran asumsi konveksitas pada himpunan yang bergerak (Colombo et al. 2012). Selain itu banyak permasalahan optimisasi yang dikonstruksikan sebagai perluasan dari konsep LQR, diantaranya adalah permainan dinamis linear kuadratik. Konsep tersebut merupakan perpaduan antara konsep LQR (kontrol optimum) dan teori permainan statis. Permainan dinamis mempelajari situasi yang melibatkan konflik kepentingan antara dua atau lebih pengambil keputusan yang dapat berupa orang, organisasi maupun pemerintah. Dalam menentukan strategi optimal permainan, permainan dinamis linear kuadratik juga memerlukan solusi dari persamaan diferensial Riccati.

Makalah ini akan mengkaji penggunaan metode *sweep* untuk menurunkan persamaan diferensial Riccati pada permainan dinamis linear kuadratik untuk sistem deskriptor. Sistem deskriptor adalah generalisasi dari sistem biasa (sistem nonsingular). Sistem ini memuat persamaan diferensial dan sekaligus persamaan aljabar. Banyak permasalahan yang disajikan dalam sistem ini, diantaranya adalah proses-proses kimia (Kumar dan Dauotidis 1996), sistem sirkuit listrik (Newcomb 1981, Newcomb dan Dziurla 1989), sistem ekonomi (Luenberger 1977), interkoneksi antar sistem berskala besar (Luenberger dan Arbel 1977, Singh dan Liu 1973), sistem pada teknik mesin (Hemami dan Wyman 1979), sistem pembangkit daya (Scott 1979) dan sistem robot (Mills dan Goldenberg 1989).

Makalah ini disajikan dengan runtutan alur sebagai berikut. Setelah pendahuluan, bagian kedua dari makalah ini menyajikan konsep permainan dinamis dan rumusan masalah yang akan diselesaikan, yaitu mencari ekuilibrium titik pelana pada permainan dinamis. Pada bagian ini juga dipaparkan metode untuk mencari ekuilibrium titik pelana tersebut. Selanjutnya bagian ketiga adalah bagian inti makalah. Pada bagian ini metode *sweep* akan diaplikasikan dalam rangka mencari persamaan diferensial Riccati yang dibutuhkan dalam mencari ekuilibrium titik pelana permainan dinamis. Terakhir, bagian keempat membicarakan peran penting persamaan diferensial Riccati yang dihasilkan dalam mencari eksistensi solusi permainan dinamis.

B. Permainan Dinamis Linear Kuadratik Sistem Deskriptor

Tipe permainan yang dibahas dalam makalah ini adalah permainan dinamis dua pemain berjumlah nol yang didefinisikan pada sistem deskriptor. Dalam tipe ini fungsi ongkos yang dimiliki oleh pemain kedua adalah negatif dari fungsi ongkos pemain pertama, sehingga jika kedua fungsi ongkos ini dijumlahkan akan menghasilkan nol. Persamaan matematis yang mengggambarkan situasi tersebut dinyatakan dengan sistem dinamik

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2w(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

dengan $E, A \in \mathrm{R}^{(n+r)\times(n+r)}$, $\mathrm{rank}(E) = n$, $B_i \in \mathrm{R}^{(n+r)\times m_i}$, $C_1 \in \mathrm{R}^{p\times(n+r)}$, $C_2 \in \mathrm{R}^{q\times(n+r)}$, $D_{12} \in \mathrm{R}^{p\times m_2}$, $D_{21} \in \mathrm{R}^{q\times m_1}$. Vektor $u \in \mathrm{U}_s$ adalah kendali yang diberikan oleh desainer kendali pada sistem (1) dan x_0 adalah nilai awal yang konsisten bagi sistem (1). Sistem (1) dikatakan regular jika $\det(\lambda E - A) \neq 0$. Sistem (1) mempunyai solusi untuk setiap nilai awal yang konsisten jika dan hanya jika sistem (1) regular. Fungsi ongkos kuadratik untuk pemain pertama diberikan oleh persamaan

$$J_1(u_1,u_2) = \int_0^{t_f} \left[x^T(t)\bar{Q}x(t) + u_1^T(t)\bar{R}_1u_1(t) - u_2^T(t)\bar{R}_2u_2(t) \right] dt + x^T(t_f)Q_{t_f}x(t_f), \tag{2}$$

sedangkan fungsi ongkos kuadratik untuk pemain kedua adalah negatif dari fungsi ongkos kuadratik untuk pemain pertama, yaitu

$$J_2(u_1,u_2) = -J_1(u_1,u_2), \tag{3}$$

dengan matriks Q, Q_T, dan R_i, $i = 1,2$, adalah simetris dan t_f menyatakan waktu akhir bagi sistem (1). Lebih lanjut, diasumsikan R_i, $i = 1,2$ definit positif. Persamaan (1) – (3) mendefinisikan permainan dinamis linear kuadratik untuk sistem deskriptor. Masalah yang ingin diselesaikan dalam makalah ini adalah mencari ekuilibrium titik pelana (*saddle-point equilibrium*) untuk permainan dinamis (1,2) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1. (Basar dan Olsder 1999) *Himpunan kendali yang diperkenankan*[1] (u_1^*, u_2^*) *disebut ekuilibrium titik pelana untuk dua pemain, dimana pemain pertama memiliki fungsi ongkos* $J(u_1,u_2)$ *dan pemain kedua* $-J(u_1,u_2)$, *jika setiap kendali* $(u_1, u_2^*), (u_1^*, u_2) \in \mathrm{U}_s \times \mathrm{U}_s$ *memenuhi ketaksamaan berikut*

[1] Sebuah kendali disebut diperkenankan (admissible) jika kendali tersebut mampu menstabilkan sistem yang dikendalikan.

$$J\left(u_1^*, u_2\right) \le J\left(u_1^*, u_2^*\right) \le J\left(u_1, u_2^*\right). \tag{4}$$

Ide untuk mendapatkan ekuilibrium titik pelana untuk permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) adalah dengan mentransformasi permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) ke dalam permainan dinamis sistem biasa (sistem nonsingular). Berikut adalah teorema yang diperlukan untuk mencapai tujuan tersebut.

Teorema 1. (Gantmacher, 1959) *Jika sistem deskriptor (1) regular maka terdapat dua matriks nonsingular* $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ *dan* $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ *sedemikian sehingga*

$$Y^T EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \text{ dan } Y^T AX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \tag{5}$$

dengan A_1 *adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai-nilai eigen dari A,* I_k *adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan*.

Berdasarkan Teorema 1. di atas, dengan mendefinisikan variabel *state* yang baru $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := X^{-1}x(t)$ dengan $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $x_2(t) \in \mathbb{R}^r$, maka permainan dinamis (1,2) mempunyai ekuilibrium titik pelana $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ jika dan hanya jika $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ adalah ekuilibrium titik pelana untuk permainan dinamis

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Y^T B_1 u(t) + Y^T B_2 w(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0 \tag{6}$$

dengan fungsi ongkos untuk pemain pertama

$$\begin{aligned} J(u_1,u_2) = \int_0^{t_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix} X^T \bar{Q} X \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u_1^T(t)\bar{R}_1 u_1(t) - u_2^T(t)\bar{R}_2 u_2(t) \right] dt \\ + x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f). \end{aligned} \tag{7}$$

Berdasarkan (6) didapat

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} Y^T \left(B_1 u(t) + B_2 w(t)\right) \\ &= -Y_2\left(B_1 u(t) + B_2 w(t)\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Substitusikan persamaan (8) ke dalam fungsi ongkos (7) didapat $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ adalah ekuilibrium titik pelana untuk permainan dinamis (6,7) jika dan hanya jika $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ adalah ekuilibrium titik pelana untuk permainan dinamis

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u(t) + Y_1 B_2 w(t), \qquad x_1(0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X^{-1} x_0 \tag{9}$$

dengan fungsi ongkos untuk pemain pertama

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2) &= \int_0^{t_f} \left\{ v^T(t) \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -B_1^T Y_2^T \\ 0 & -B_2^T Y_2^T \end{bmatrix} X^T \bar{Q} X \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 B_1 & -Y_2 B_2 \end{bmatrix} v(t) + +u_1^T(t) \bar{R}_1 u_1(t) \right. \\ &\qquad \left. - u_2^T(t) \bar{R}_2 u_2(t) \right\} dt + x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f) \\ &= \int_0^{t_f} \left\{ z^T(t) M_\gamma z(t) \right\} dt + x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f) \end{aligned} \tag{10}$$

dengan $v^T(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & u_1^T(t) & u_2^T(t) \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} Q & V & W \\ V^T & R_{11} & N \\ W^T & N^T & R_{22} \end{bmatrix}$ dan

$Q := X_1^T \bar{Q} X_I$, $V := -X_1^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_1$, $W := -X_1^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2$,

$N := B_1^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2$, $R_{11} := B_1^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_1 + \bar{R}_1$,

$R_{22} := B_2^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2 - \bar{R}_2$.

Untuk matriks M di atas diasumsikan matriks R_{11} definit positif dan matriks R_{22} definit negatif. Dengan demikian permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) ekuivalen dengan permainan dinamis sistem biasa (9,10).

C. Metode *Sweep* pada Permainan Dinamis Linear Kuadratik Sistem Deskriptor

Setelah diperoleh permainan dinamis linear kuadratik (9,10) yang ekuivalen dengan permainan dinamis (1,2) berikutnya akan dicari persamaan diferensial Riccati untuk permainan dinamis (9,10) yang bermanfaat dalam mencari solusi ekuilibrium titik pelana bagi permainan dinamis (9,10). Untuk itu dibentuk fungsi Hamiltonian untuk pemain pertama dan kedua sebagai berikut

$$H_1 = 2\left[x_1^T(t) \quad u_1^T(t) \quad u_2^T(t)\right] M \begin{bmatrix} x_1(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \tilde{\psi}_1^T(t)\left(A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t)\right)$$

$$\begin{aligned} &= 2\Big[x_1^T(t) Q x_1(t) + u_1^T(t) V^T x_1(t) + u_2^T(t) W^T x_1(t) + x_1^T(t) V u_1(t) + u_1^T(t) R_{\bar{1}\bar{1}} u_1(t) \\ &\quad + u_2^T(t) N^T u_2(t) + x_1^T(t) W u_2(t) + u_1^T(t) N u_2(t) + u_2^T(t) R_{\bar{2}\bar{2}} u_2(t)\Big] \\ &\quad + \tilde{\psi}_1^T\left(A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t)\right) \end{aligned}$$

(11)

dan

$$H_2 = -\left(2\left[x_1^T(t) \quad u_1^T(t) \quad u_2^T(t)\right] \bar{M} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}\right) + \tilde{\psi}_2^T(t)\left(A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t)\right)$$

$$\begin{aligned} &= 2\Big[-x_1^T(t) Q x_1(t) - u_1^T(t) V^T x_1(t) - u_2^T(t) W^T x_1(t) - x_1^T(t) V u_1(t) - u_1^T(t) R_{11} u_1(t) \\ &\quad - u_2^T(t) N^T u_2(t) - x_1^T(t) W u_2(t) - u_1^T(t) N u_2(t) - u_2^T(t) R_{\bar{2}\bar{2}} u_2(t)\Big] \\ &\quad + \tilde{\psi}_2^T(t)\left(A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t)\right). \end{aligned}$$

(12)

Berdasarkan prinsip minimum Pontriagyn syarat perlu penyelesaian optimal masalah di atas adalah

i. $\dot{x}_1(t) = \dfrac{\partial H_1}{\partial \psi_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial \psi_2} = A_1 x_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t)$

ii. $\dot{\tilde{\psi}}_1(t) = -\dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} = -\left(2Q x_1(t) + 2V u_1(t) + 2W u_2(t) + A_1^T \tilde{\psi}_1(t)\right), \quad \tilde{\psi}_1(t_f) = 2Q_{t_f} x_1(t_f)$

$\dot{\tilde{\psi}}_2(t) = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} = 2Q x_1(t) + 2V u_1(t) + 2W u_2(t) - A_1^T \tilde{\psi}_2(t), \quad \tilde{\psi}_2(t_f) = -2Q_{t_f} x_1(t_f)$

iii. $0 = \dfrac{\partial H_1}{\partial u_1} = 2V^T x_1(t) + 2R_{11} u_1(t) + 2N u_2(t) + B_1^T Y_1^T \tilde{\psi}_1(t)$

$$0=\frac{\partial H_2}{\partial u_2}=-2W^T x_1(t)-2R_{\overline{22}}u_2(t)-2N^T u_1(t)+B_2^T Y_1^T \tilde{\psi}_2(t)$$

atau $$-\begin{bmatrix} R_{11} & N \\ -N^T & -R_{\overline{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V^T x_1(t)+{}^1\!/_2\, B_1^T Y_1^T \tilde{\psi}_1(t) \\ -W^T x_1(t)+{}^1\!/_2\, B_2^T Y_1^T \tilde{\psi}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Asumsi matriks R_{11} definit positif dan matriks R_{22} definit negatif pada matriks permainan *M* mengakibatkan matriks $\bar{G}:=\begin{bmatrix} R_{11} & N \\ -N^T & -R_{\overline{22}} \end{bmatrix}$ mempunyai invers. Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}=-\bar{G}^{-1}\begin{bmatrix} V^T x_1(t)+{}^1\!/_2\, B_1^T Y_1^T \tilde{\psi}_1(t) \\ -W^T x_1(t)+{}^1\!/_2\, B_2^T Y_1^T \tilde{\psi}_2(t) \end{bmatrix}.$$

(13)

Selanjutnya didefinisikan $\psi(t)={}^1\!/_2\,\tilde{\psi}(t)$ yang akan menghasilkan persamaan *state* and *costate*

$$\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+Y_1B_1u_1(t)+Y_1B_2u_2(t)$$

(9)

$$\dot{\psi}_1(t)=-Qx_1(t)-Vu_1(t)-Wu_2(t)-A_1^T\psi_1(t),\qquad \psi_1(t_f)=Q_{t_f}x_1(t_f)$$

(14)

$$\dot{\psi}_2(t)=Qx_1(t)+Vu_1(t)+Wu_2(t)-A_1^T\psi_2(t),\qquad \psi_2(t_f)=-Q_{t_f}x_1(t_f).$$

(15)

Berikutnya dengan menggunakan metode *sweep* akan dicari persamaan diferensial Riccati untuk permainan dinamis (9,10) sebagai berikut. Diasumsikan

$$\psi_1(t)=P_1(t)x_1(t) \qquad \text{dengan} \qquad P_1(t_f)=Q_{t_f}$$

(16)

dan $\psi_2(t) = P_2(t)\,x_1(t)$ dengan $P_2(t_f) = -Q_{t_f}$.

(17)

Turunkan persamaan (16) terhadap variabel *t* dihasilkan

$$\dot{\psi}_1(t) = \dot{P}_1(t)\,x_1(t) + P_1(t)\,\dot{x}_1(t), \qquad P_1(t_f) = Q_{t_f}$$

(18)

Substitusikan persamaan (9), (13) dan (14) ke dalam persamaan (18) dihasilkan

$$\begin{aligned}
&-Qx_1(t) + \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}\bar{G}^{-1}\begin{bmatrix} V^T \\ -W^T \end{bmatrix}x_1(t) + \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}\bar{G}^{-1}\begin{bmatrix} B_1^T Y_1^T & 0 \\ 0 & B_2^T Y_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}x_1(t) \\
&-J^T P_1(t)\,x_1(t) = \dot{P}_1(t)\,x_1(t) + P_1(t)\,Jx_1(t) - P_1(t)\begin{bmatrix} Y_1B_1 & Y_1B_2 \end{bmatrix}\bar{G}^{-1}\begin{bmatrix} V^T \\ -W^T \end{bmatrix}x_1(t) \\
&-P_1(t)\begin{bmatrix} Y_1B_1 & Y_1B_2 \end{bmatrix}\bar{G}^{-1}\begin{bmatrix} B_1^T Y_1^T & 0 \\ 0 & B_2^T Y_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}x_1(t), \quad P_1(t_f) = Q_{t_f} \qquad (19)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mendefinisikan $\tilde{Z} = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}$, $\bar{Z} = \begin{bmatrix} V^T \\ -W^T \end{bmatrix}$,

$\tilde{B}^T = \operatorname{diag}\left\{B_1^T Y_1^T, B_2^T Y_1^T\right\}$,

$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ dan $B = Y_1\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
&-Qx_1(t) + \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z}x_1(t) + \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)\,x_1(t) - J^T P_1(t)\,x_1(t) = \dot{P}_1(t)\,x_1(t) + P_1(t)\,Jx_1(t) \\
&-P_1(t)\,B\bar{G}^{-1}\bar{Z}x_1(t) - P_1(t)\,B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)\,x_1(t), \quad P_1(t_f) = Q_{t_f}
\end{aligned}$$

(20)

dan setelah persamaan (20) disusun ulang dihasilkan persamaan

$$\begin{aligned}
\dot{P}_1(t)\,x_1(t) = &-J^T P_1(t)\,x_1(t) - P_1(t)\left(J - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right)x_1(t) + P_1(t)\,B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)\,x_1(t) \\
&+\tilde{Z}\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)\,x_1(t) - Qx_1(t) + \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z}x_1(t), \qquad P_1(t_f) = Q_{t_f}
\end{aligned}$$

(21)

Dikarenakan persamaan (21) berlaku untuk semua nilai awal $x_1(0)$ maka diperoleh

$$\dot{P}_1(t) = -J^T P_1(t) - P_1(t)\left(J - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right) + P_1(t) B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T \tilde{P}(t) + \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T \tilde{P}(t) - Q + \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z},$$
$$P_1(t_f) = Q_{t_f}.$$

(22)

Selanjutnya turunkan persamaan (17) terhadap variabel t diperoleh

$$\dot{\psi}_2(t) = \dot{P}_2(t) x_1(t) + P_2(t)\dot{x}_1(t), \qquad P_2(t_f) = -Q_{t_f}$$

(23)

Degan cara yang sama sebagaimana langkah di atas diperoleh persamaan

$$\dot{P}_2(t)x_1(t) = -A_1^T P_2(t)x_1(t) - P_2(t)\left(A_1 - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right)x_1(t) + P_2(t)B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)x_1(t)$$
$$- \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t)x_1(t) + Qx_1(t) - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z}x_1(t), \qquad P_2(t_f) = -Q_{t_f}$$

(24)

Sebagaimana persamaan (21), dikarenakan persamaan (24) berlaku untuk semua nilai awal $x_1(0)$ maka diperoleh

$$\dot{P}_2(t) = -A_1^T P_2(t) - P_2(t)\left(A_1 - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right) + P_2(t)B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t) - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t) + Q - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z},$$
$$P_2(t_f) = -Q_{t_f}$$

(25)

Selanjutnya, tambahkan persamaan (22) dan (25) dihasilkan persamaan differensial dalam $(P_1 + P_2)(t)$

$$\frac{d(P_1+P_2)}{dt}(t) = -A_1^T (P_1+P_2)(t) - (P_1+P_2)\left(A_1 - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right) + (P_1+P_2)B\bar{G}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}(t) \quad .$$

(26)

Jelas $(P_1+P_2)(\cdot) = 0$ menyelesaikan persamaan (26). Dikarenakan solusi dari persamaan diferensial (26) adalah tunggal maka dapat disimpulkan $P_1(t) = -P_2(t)$. Substitusikan hasil ini ke dalam persamaan (22) diperoleh

$$\dot{P}_1(t) = -\left(A_1^T - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{B}^T\right)P_1(t) - P_1(t)\left(A_1 - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right) + P_1(t)B\bar{G}^{-1}\bar{B}^T P_1(t) - \left(Q - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z}\right),$$
$$P_1(t_f) = Q_{t_f}.$$

Didefinisikan $\bar{A}_1 = A_1^T - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{B}^T$, $\tilde{A}_1 = A_1 - B\bar{G}^{-1}\bar{Z}$, dan $\tilde{Q} = Q - \tilde{Z}\bar{G}^{-1}\bar{Z}$ maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\dot{P}_1(t) = -\bar{A}_1^T P_1(t) - P_1(t)\tilde{A}_1 + P_1(t)B\bar{G}^{-1}\bar{B}^T P_1(t) - \tilde{Q}, \quad P_1(t_f) = Q_{t_f}.$$

(27)

Selanjutnya untuk menunjukkan kesimetrian persamaan (27) didefinisikan $\hat{G} = \begin{bmatrix} R_{11} & N \\ N^T & R_{\overline{22}} \end{bmatrix}$ yang akan menghasilkan $\bar{G} = {}^{-\,\hat{}}$. Dikarenakan $\bar{G}^{-1}\bar{Z} = \hat{G}^{-1}\tilde{Z}^T$ dan $\bar{G}^{-1}\bar{B}^T = \hat{G}^{-1}B^T$, maka persamaan (27) dapat ditulis sebagai

$$\dot{P}_1(t) = -\tilde{A}_1^T P_1(t) - P_1(t)\tilde{A}_1 + P_1(t)B\hat{G}^{-1}B^T P_1(t) - \tilde{Q}, \quad P_1(t_f) = Q_{t_f}.$$

(28)

Dengan mendefinisikan $P(t) = P_1(t)$ pada persamaan (28) di atas dihasilkan

$$\dot{P}(t) = -\tilde{A}_1^T P(t) - P(t)\tilde{A}_1 + P(t)B\hat{G}^{-1}B^T P(t) - \tilde{Q}, \quad P(t_f) = Q_{t_f}.$$

(29)

Persamaan (29) adalah persamaan diferensial Riccati untuk permainan dinamis (9,10).

D. Aplikasi pada Permainan Dinamis Linear Kuadratis Sistem Deskriptor

Permainan dinamis dapat dipandang dari perpaduan konsep *linear quadratic regulator* pada teori kontrol optimum dan teori permainan statis. Sebagaimana dalam *linear quadratic regulator*, eksistensi solusi (dalam hal ini eksistensi ekuilibrium titik pelana) dalam permainan dinamis dikarakterisasi oleh eksistensi solusi suatu persamaan diferensial Riccati. Oleh sebab itu persamaan diferensial Riccati (29) memegang peranan penting dalam mencari solusi ekuilibrium titik pelana permainan dinamis (1,2) atau (9,10). Untuk melihat hal tersebut, berikut diberikan teorema syarat perlu dan cukup eksistensi solusi ekuilibrium titik pelana permainan dinamis (1,2) atau (9,10). Bukti dari teorema ini dapat dilihat di Musthofa et al. (2013).

Teorema 2. (Musthofa et al. 2013) Diberikan permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) atau (9,10) dengan matriks $\bar{Q}$, $\bar{Q}_{t_f}$ dan $\bar{R}_i$, $i = 1,2$ simetris dan diasumsikan matriks $\bar{R}_i$, $i = 1,2$ definit positif. Maka, untuk setiap $t_f \in [0, t_1)$, permainan dinamis tersebut mempunyai solusi ekuilibrium titik pelana untuk setiap nilai awal permainan jika dan hanya jika dua kondisi berikut dipenuhi pada $\left[0,t_1\right)$.

1. Persamaan diferensial Riccati (29)

$$\dot{P}(t) = -\tilde{A}_1^T P(t) - P(t)\tilde{A}_1 + P(t)B\hat{G}^{-1}B^T P(t) - \tilde{Q}, \quad P(t_f) = Q_{t_f}$$

mempunyai solusi simetri $P\left(0,t_f\right)$ untuk semua $t_f \in \left[0,t_1\right)$.

2. Dua persamaan diferensial Riccati

$$\dot{K}_1(t) = -J^T K_1(t) - K_1(t)J + \left(K_1(t)Y_1B_1 + V_1\right)R_{11}^{-1}\left(B_1^T Y_1^T K_1(t) + V_1^T\right) - Q \;; \quad K_1(T) = Q_{t_f}$$

(30)

$$\dot{K}_2(t) = -J^T K_2(t) - K_2(t)J + \left(K_2(t)Y_1B_2 + V_2\right)R_{22}^{-1}\left(B_2^T Y_1^T K_2(t) + V_2^T\right) + Q \;; \quad K_2(T) = -Q_{t_f}$$

(31)

mempunyai solusi $K_i(\cdot)$ pada $\left[0,t_f\right]$, $i = 1,2$.

Lebih lanjut, jika dua kondisi di atas dipenuhi ekuilibrium titik pelana tersebut adalah tunggal dan diberikan oleh persamaan

$$\begin{bmatrix} u_1^*(t) \\ u_2^*(t) \end{bmatrix} = -\hat{G}^{-1}\left(\overline{Z} + \tilde{B}^T \overline{P}(t)\right)\tilde{\Phi}(t,0)\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} X^{-1}x_0.$$

(32)

dengan $\tilde{\Phi}(t,0)$ memenuhi persamaan transisi

$$\dot{\tilde{\Phi}}(t,0) = \left(J - B\overline{G}^{-1}\left(\overline{Z} + \tilde{B}^T \overline{P}(t)\right)\right)\tilde{\Phi}(t,0) \;; \quad \tilde{\Phi}(0,0) = I \;.$$

Dalam Teorema 2. di atas terlihat peran eksistensi solusi persamaan diferensial Riccati (29-31) sebagai syarat perlu dan cukup keberasaan ekuilibrium titik pelana suatu permainan dinamis. Persamaan diferensial Riccati (30–31) mewakili konsep *linear quadratic regulator* untuk pemain pertama dan kedua. Sehingga eksistensi solusi kedua persamaan diferensial Riccati tersebut memberikan makna bahwa masing-masing pemain harus mampu menstabilkan sistem mereka sendiri-sendiri.

E. Kesimpulan

Makalah ini telah mengkaji penerapan metode *sweep* untuk mengkonstruksikan persamaan diferensial Riccati. Persamaan ini berguna untuk mencari solusi ekuilibrium titik pelana pada permainan dinamis linear kuadratik untuk sistem deskrriptor. Transformasi permainan dari sistem deskriptor ke sistem biasa menyebabkan pengkonstruksian persamaan diferensial Riccati mengikuti metode yang telah berhasil dilakukan pada sistem biasa. Selanjutnya teorema yang menyatakan peran persamaan tersebut dalam mencari solusi permainan dinamis linear kuadratik untuk sistem deskriptor juga telah disajikan.

Namun demikian kajian dalam makalah ini masih terbatas pada sistem deskriptor yang berindeks satu. Sehingga pengembangan metode *sweep* pada sistem deskriptor berorde tinggi merupakan obyek penelitian yang masih harus dikaji lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Basar, T. dan Olsder, G.J., (1999), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Academic Press SIAM, New York.

Bryson, A.E. dan Ho, Y-C., (1975). *Applied Optimal Control*, Taylor and Francis, New York.

Colombo, G., Henrion, R., Hoang, D. dan Mordukhovich, B.S., (2012). Optimal Control of the Sweeping Process, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series* B: *Applications & Algorithms*, vol. 29, 117 – 159.

Gantmacher, F., (1959). *Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.

Hemami, H. dan Wyman, B. F. (1979). Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in the Frontal Plane, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, 526 – 535.

Kirk, D.E., (1998), *Optimal Control Theory: An Introduction*, Dover Publications, New York.

Kumar, A. dan Daoutidis, P. (1996). State-Space Realizations of Linear Differential Algebraic-Equation Systems with Control-Dependent State Space, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, 269 – 274.

Lewis, F.L. dan Syrmos, V.L., (1995), *Optimal Control*, John Wiley and Sons, New York.

Luenberger, D. G., (1977). Dynamic Equation in Descriptor Form, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 22, 312 – 321.

Luenberger, D. G. dan Arbel. (1977). Singular Dynamic Leontief systems, *Econometrica*, vol. 45, 991 – 995.

Mills, J. K. dan Goldenberg, A. A., (1989). Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, 30 – 46.

Moreau, J.J. (1974). On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity, *Prosiding New Variational Techniques in Mathematical Physics*, Cremonese, Roma, 173–322.

Moreau, J.J. (1977). Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space, *Journal of Differential Equations*, vol. 26, 347 – 374.

Musthofa, M. W., Salmah, Engwerda, J. C., dan Suparwanto, A., (2013). The Open-Loop Zero-Sum Linear Quadratic Impulse Free Descriptor Differential Game, *International Journal on Applied Mathematics and Statistics*, vol. 35, 29 – 44.

Newcomb, R. W. (1981). The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits, *IEEE Transactions on Circuits Systems*, vol. vol. 28, 62 – 71.

Newcomb, R. W. dan Dziurla, B. (1989). Some Circuits and Systems Applications of Semistate Theory, *Circuits Systems Signal Processes*, vol. 8, 235 – 260.

Singh, S. dan Liu, R. W. (1973). Existence of State Equation Representation of Linear Large-Scale Dynamical Systems, *IEEE Transaction Circuits Systems*, vol. 20, 239 – 246.

Scott, B., (1979). Power system Dynamic Response Calculations, *IEEE Proceeding*, vol. 67, 219 – 247.

Vinter, R.B., (2000). *Optimal Control*, Birkhauser, Boston.