QUADRATIC
JOURNAL OF INNOVATION AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Vol. 1, No. 1, April 2021, pp. 56 – 79
Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Penerapan Fungsi Green dari Persamaan Poisson pada Elektrostatika

Fathul Khairi[1], **Malahayati**[2*],
[1,2] Department of Mathematics, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
* Corresponding Author. E-mail: malahayati@uin-suka.ac.id

Article History
Received: March 30th, 2021
Revised: April 20th, 2021
Accepted: April 27th, 2021

https://doi.org/10.14421/quadratic.2021.011-08

ABSTRAK

Fungsi Dirac delta merupakan suatu fungsi yang secara matematis tidak memenuhi kriteria sebagai sebuah fungsi, hal ini dikarenakan fungsi tersebut bernilai tak hingga pada suatu titik. Namun, dalam fisika fungsi Dirac delta merupakan konstruksi yang penting, salah satunya dalam mengkonstruksi fungsi Green. Penelitian ini mengkonstruksi fungsi Green dengan memanfaatkan fungsi Dirac delta dan identitas Green. Selanjutnya pengkonstruksian diarahkan pada fungsi Green dari persamaan Poisson yang dilengkapi dengan syarat batas Dirichlet. Setelah bentuk solusi fungsi Green dari persamaan Poisson diperoleh, ditentukan fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen pada persamaan Poisson. Hasil tersebut digunakan untuk menganalisis penerapan persamaan Poisson dalam elektrostatika.
Kata Kunci:elektrostatika, fungsi Dirac delta, fungsi Green, persamaan Poisson

ABSTRACT

The Dirac delta function is a function that mathematically does not meet the criteria as a function, this is because the function has an infinite value at a point. However, in physics the Dirac delta function is an important construction, one of which is in constructing the Green function. This research constructs the Green function by utilizing the Dirac delta function and Green identity. Furthermore, the construction is directed at the Green function of the Poisson's equation which is equipped with the Dirichlet boundary condition. After the form of the Green function solution from the Poisson's equation is obtained, the Green function is determined by means of the expansion of the eigen functions in the Poisson's equation. These results are used to analyze the application of the Poisson equation in electrostatic.

Keywords: Dirac delta function, electrostatics, Green function, Poisson’s equation

PENDAHULUAN

Beragam teori berkembang untuk membantu menyelesaikan masalah syarat batas dalam persamaan diferensial baik secara analitik maupun numerik. Secara analitik, salah satu teori yang populer untuk membantu menyelesaikan masalah syarat batas dari suatu persaman diferensial adalah fungsi Green. Fungsi Green pertama kali dikenalkan oleh seorang ilmuwan Inggris bernama George Green (1793-1841) dalam karyanya yang berjudul “*Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electromagnetism*” pada tahun 1828. Fungsi Green memberikan suatu alternatif untuk menemukan solusi fundamental dari suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat batas tertentu. Fungsi Green merupakan formula matematika yang sangat berguna dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya yang bersifat nonhomogen. Sebagai suatu formula matematika, fungsi Green juga memiliki penerapan dalam elektromagnetika, fisika zat padat, fisika kuantum dan topik-topik lain dalam matematika atau matematika fisika [1]-[3].

Solusi untuk suatu persamaan diferensial terkadang tidaklah tunggal. Ketidaktunggalan solusi ini dipengaruhi oleh syarat batas yang diberikan. Suatu persamaan diferensial akan memiliki solusi yang tunggal jika diberikan syarat batas yang sesuai. Syarat batas merupakan kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain fungsi yang akan ditentukan solusinya. Suatu persamaan diferensial parsial orde n dapat memiliki syarat batas dalam nilai fungsi u yang memuat variabel tak bebas dan juga turunan-turunan parsialnya hingga order $n-1$ [4]-[7].

Fungsi Dirac delta pertama kali dikenalkan oleh P. Dirac pada tahun 1920, yang merupakan salah satu usaha untuk membuat alat matematika dalam membangun teori quantum. Fungsi Dirac delta dalam statistika bisa dianggap sebagai suatu generalisasi distribusi probabilitas atau dalam teori dinamika disebut juga sebagai fungsi impuls. Fungsi Dirac-delta merupakan alat yang penting dalam matematika dan digunakan secara luas dalam fisika seperti mekanika quantum, elektromagnetika, optik dan masalah teknik [8], [9].

Banyak peneliti yang telah membahas mengenai fungsi Green, persamaan diferensial parsial serta penerapannya. Diantaranya adalah Russel L. Herman pada tahun 2015 dalam bukunya menjelaskan mengenai teori-teori persamaan diferensial parsial yang di dalamnya terdapat teori mengenai konstruksi fungsi Green [5]. Selain itu juga penelitian yang dilakukan oleh Maulana Malik pada tahun 2009 dari Universitas Indonesia yang melakukan penelitian mengenai konstruksi fungsi Green untuk persamaan Poisson dalam penelitiannya [8]. Penelitian ini akan menggambarkan konstruksi fungsi Green secara lebih detail dari yang telah dituliskan oleh Russel L. Herman dan Maulana Malik. Selain itu dalam penelitian ini juga membahas mengenai solusi persamaan medan potensial listrik yang berupa persamaan laplace (kasus khusus persamaan Poisson) yang belum dibahas oleh peneliti sebelumnya. Hal ini menarik, sebab solusinya kemudian akan dilihat nilai potensial listrik pada titik tertentu dengan nilai awal dan nilai batas tertentu sehingga dapat dibentuk fungsi Green dari solusi persamaan medan potensial listrik tersebut.

METODE

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur, yaitu meliputi studi kepustakaan dan penelitian sebelumnya yang berhubungan dengan pengkonstruksian Fungsi Green. Berdasarkan cara tersebut peneliti dapat mengumpulkan dan mendapatkan data–data, informasi, konsep yang bersifat teoritis dari jurnal, buku–buku dan referensi lain yang berkaitan dengan permasalahan. Permasalahan dalam penelitian ini adalah pengkonstruksian fungsi Green dari persamaan Poisson selanjutnya dikaji penerapannya pada elektrostatika. Teori dan informasi yang telah diperoleh merupakan pendukung untuk melakukan langkah selanjutnya yang berhubungan dengan konstruksi fungsi Green. Setelah bentuk solusi Fungsi Green dari persamaan Poisson diperoleh, akan ditentukan Fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen pada persamaan Poisson. Hasil tersebut, digunakan untuk menganalisis penerapan persamaan Poisson dalam elektrostatika lebih lanjut.

Fungsi Green dari Persamaan Poisson

Fungsi Dirac delta

Konstruksi fungsi Green dari persamaan Poisson dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat fungsi Dirac delta dan identitas Green. Selanjutnya digunakan ekspansi fungsi eigen dari persamaan Poisson untuk menentukan bentuk fungsi Green yang akan ditentukan.

Definisi 1. Fungsi Dirac delta [9]. *Fungsi Dirac-delta adalah fungsi yang memuncak sangat tajam dan didefinisikan sebagai:*

$$\delta(x-t)=\begin{cases}\infty & x=t\\ 0 & x\neq t.\end{cases}$$

Integral untuk fungsi $\delta\,(x-t)$ ternormalisasi pada satu satuan sehingga integral tersebut bernilai 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)dx=1,\; x,a\in\mathbb{R}.$$

Karena $\delta(x-t)$ selalu bernilai nol untuk $x\neq t$ maka batas pengintegralan $(-\infty,\infty)$ dapat diubah menjadi $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$ untuk suatu $\varepsilon>0$ yang kecil.

Sifat 1. [10]. *Misalkan f adalah fungsi kontinu pada $(-\infty,\infty)$ dan $x,t\in\mathbb{R}$. Fungsi Dirac delta memiliki sifat bahwa:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-t)dx=f(t). \tag{1}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi Dirac delta diketahui bahwa nilai $\delta(x)$ akan selalu bernilai nol kecuali untuk $x=t$. Sehingga untuk membuktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-t)dx=f(t)$ maka daerah pengintegralan bisa diubah dalam wilayah yang sangat kecil.

Misalkan daerah pengintegralan dilakukan dalam daerah sebesar epsilon $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$ untuk sembarang $\varepsilon>0$. Sehingga bentuk integral yang akan dibuktikan menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-c)dx=\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}f(x)\delta(x-c)dx.$$

Karena fungsi $f(x)$ kontinu pada $x=t$ maka nilai $f(x)$ pada interval $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ tidak akan jauh berbeda dengan $f(t)$. Misalkan $f(x)=f(t)$, karena $f(t)$ merupakan suatu fungsi konstan maka $f(t)$ dapat dikeluarkan dari integral sehingga persamaan (1) menjadi:

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x)\delta(x-t)dx = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(t)\delta(x-t)dx \tag{2}$$

$$= f(t)\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \delta(x-t)dx.$$

Sehingga berdasarkan definisi fungsi Dirac delta maka diperoleh dari persamaan (2) bahwa:

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x)\delta(x-t)dx = f(t). \tag{3}$$

Atau dengan kata lain diperoleh benar bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx = f(t)$.■

Fungsi Dirac delta yang berlaku pada domain $\mathbb{R}$ juga akan berlaku pada domain $\mathbb{R}^2$. Sehingga dapat dituliskan fungsi dirac delta pada domain $\mathbb{R}^2$ seperti yang tertuang dalam sifat berikut ini.

Sifat 2. [4], [10]. *Sifat fungsi dirac delta pada domain* $\mathbb{R}^2$ *mengatakan bahwa:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-t)\delta(y-s)dxdy = f(t,s).$$

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-t)\delta(y-s)dxdy = f(t,s). \tag{4}$$

untuk fungsi f yang kontinu pada $(-\infty,\infty)$ dan $s,t,x,y\in\mathbb{R}$. Karena integral yang ada dalam sifat tersebut merupakan integral lipat dua dalam variabel x dan y maka untuk membuktikan sifat tersebut pengerjaan integral akan dilakukan terlebih dahulu untuk salah satu variabelnya. Misalkan integral akan dikerjakan terlebih dahulu dalam variabel y. Apabila integral terlebih dahulu dikerjakan dalam variabel y maka fungsi dalam variabel x dapat dianggap sebagai fungsi konstan dan dapat dikeluarkan dari dalam integral. Berdasarkan hal tersebut maka persamaan (4) dapat dituliskan sebagai:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-t)\delta(y-s)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(y-s)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)f(x,s)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,s)\delta(x-t)dx.$$

Selanjutnya setelah diperoleh hasil dari pengerjaan integral dalam variabel y maka selanjutnya pengerjaan integral akan dilakukan dalam variabel x. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh bahwa:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-t)\delta(y-s)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,s)\delta(x-t)dx. \tag{5}$$

Kemudian untuk mengerjakan integral dalam variabel x digunakan sifat sebelumnya sehingga diperoleh bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,s)\delta(x-t)dx = f(t,s).$$

Kemudian dengan mensubtitusikan hasil ini ke dalam persamaan (5) diperoleh benar bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-t)\delta(y-s)dxdy = f(t,s).\blacksquare$$

Pengantar Fungsi Green

Definisi 2. Fungsi Green [9]. *Diberikan suatu operator linear diferensial* L *dan himpunan syarat batas* Ω. *Fungsi Green* $G(x,y;a,b)$ *merupakan solusi untuk persamaan:*

$$LG(x,y;a,b) = \delta(x-a)\delta(y-b).$$

Karena L merupakan operator linear diferensial, maka persamaan di atas merupakan persamaan diferensial parsial untuk G dengan persamaan di ruas kanan merupakan fungsi dirac-delta. Perlu dicatat bahwa x dan y pada persamaan diatas merupakan variabel, sementara a dan b merupakan parameter.

Definisi di atas memberikan pemahaman bahwa untuk dapat memahami dengan baik apa itu fungsi Green maka diperlukan dua hal. Hal pertama yaitu operator linear diferensial. Salah satu contoh operator linear diferensial adalah operator *Laplacian* $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z}$. Hal kedua yang diperlukan adalah syarat batas homogen.

Salah satu sifat penting dari fungsi Green adalah sifat simetrisnya, yang menunjukkan bahwa fungsi Green untuk persamaan Poisson pada fungsi dua peubah merupakan fungsi Dirac delta bersifat simetris. Sifat ini sangat bermanfaat dalam konstruksi selanjutnya.

Teorema 1. Sifat simetris fungsi Green [6]. *Diberikan* $G(x,y;a,b)$ *merupakan fungsi Green yang memenuhi syarat batas Dirichlet homogen maka* $G(x,y;a,b)$ *bersifat simetris yaitu:*

$$G(x,y;a,b) = G(a,b;x,y).$$

Bukti:

Untuk membuktikan bagian ini digunakan identitas green kedua. Berdasarkan Identitas green kedua yang mengatakan bahwa:

$$\iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \iiint_{\Omega}\left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)dV. \tag{6}$$

Misalkan pada persamaan diatas $u = G(x,y;a,b)$ dan $v = G(a,b;x,y)$ Akan ditunjukkan bahwa:

$$G(x,y;a,b) = G(a,b;x,y).$$

Diketahui bahwa fungsi memenuhi syarat batas Dirichlet homogen. Berdasarkan hal tersebut maka diperoleh ruas kiri pada persamaan (6) akan bernilai nol. Kemudian berdasarkan hal tersebut dan pemisalan yang telah dilakukan, persamaaan (6) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\iiint_{\Omega}\left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)dV = 0.$$

$$\iiint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\nabla^2 G(a,b;x,y) - G(a,b;x,y)\nabla^2 G(x,y;a,b)\right)dV = 0.$$

Karena fungsi yang terdapat dalam integral merupakan fungsi dua peubah maka bentuk integral dapat dirubah menjadi integral lipat dua. Sehingga berdasarkan hal tersebut persamaan diatas dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\nabla^2 G(a,b;x,y) - G(a,b;x,y)\nabla^2 G(x,y;a,b)\right)dA = 0.$$

Kemudian dengan menggunakan definisi fungsi green yang melibatkan fungsi dirac delta maka diperoleh:

$$\nabla^2 G(x,y;a,b) = \delta(x-a)\delta(y-b).$$

$$\nabla^2 G(a,b;x,y) = \delta(a-x)\delta(b-y).$$

Berdasarkan hal tersebut diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\nabla^2 G(a,b;x,y)-G(a,b;x,y)\nabla^2 G(x,y;a,b)\right)dA &= \iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\delta(a-x)\delta(b-y)-G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA\\ &= \iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\delta(a-x)\delta(b-y)\right)dA-\iint_{\Omega}\left(G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA\\ &= 0\end{aligned}$$

Kemudian dari hasil tersebut diperoleh bahwa :

$$\iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\delta(a-x)\delta(b-y)\right)dA-\iint_{\Omega}\left(G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA=0.$$

Selanjutnya dengan memindahkan ekspresi $-\iint_{\Omega}\left(G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA$ ke ruas kanan akan diperoleh bahwa:

$$\iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\delta(a-x)\delta(b-y)\right)dA=\iint_{\Omega}\left(G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA. \quad (7)$$

Oleh karena itu dengan menggunakan sifat fungsi dirac delta pada domain $\mathbb{R}^2$ sebelumnya, diperoleh bahwa:

$$\iint_{\Omega}\left(G(x,y;a,b)\delta(a-x)\delta(b-y)\right)dA=G(x,y;a,b).$$

$$\iint_{\Omega}\left(G(a,b;x,y)\delta(x-a)\delta(y-b)\right)dA=G(a,b;x,y).$$

Kemudian dengan mensubtitusikan hasil di atas ke dalam persamaan (7) diperoleh bahwa:

$$G(x,y;a,b)=G(a,b;x,y).$$

Berdasarkan hal tersebut diperoleh bahwa $G(x,y;a,b)$ bersifat simetris.■

Konstruksi fungsi Green dari persamaan Poisson melalui fungsi Dirac delta dan identitas Green

Bagian ini akan memberikan gambaran mengenai keterkaitan antara fungsi Green dan solusi persamaan Poisson dengan menggunakan konsep fungsi dirac-delta dan identitas Green sebagai alat bantu.

Diberikan $u(x,y)$ adalah fungsi dua peubah dan L merupakan operator linear diferensial. Persamaan Poisson merupakan persamaan diferensial parsial orde dua nonhomogen yang secara umum memiliki bentuk:

$$L\left(u(x,y)\right)=f(x,y) \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

L dalam persamaan ini merupakan operator laplacian dan dapat dinyatakan sebagai sebagai:

$$\begin{aligned}L&=\nabla^2\\ &=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Sehingga dengan demikian persamaan Poisson secara umum memiliki bentuk:

$$\begin{aligned}L\left(u(x,y)\right)&=\nabla^2 u(x,y)\\ &=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\\ &=f(x,y).\end{aligned}$$

Apabila operator *laplacian* di atas mendiferensialkan fungsi Green maka sesuai definisi fungsi Green dapat dituliskan persamaan sebagai berikut

$$\nabla^2 G(x,y;a,b)=\delta(x-a)\delta(y-b).$$

Kemudian hubungan antara fungsi Green dan solusi atas persamaan Poisson dapat ditemukan dari teorema Green yang kedua. Apabila diberikan domain syarat batas Dirichlet homogen $\partial\Omega$ dan domain fungsinya berada di dalam Ω maka identitas Green kedua memiliki bentuk:

$$\int_{\partial\Omega}\left[\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi\right].nds=\iint_{\Omega}\left[\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi\right]dA.$$

Misalkan $\varphi=u(x,y)$ dan $\psi=G(x,y;a,b)$. Untuk memudahkan penulisan maka $u(x,y)$ akan dituliskan sebagai u dan $G(x,y;a,b)$ akan dituliskan sebagai G. Sehingga persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left[u\nabla G - G\nabla u\right].nds &= \iint_{\Omega}\left[u\nabla^2 G - G\nabla^2 u\right]dA \\ &= \iint_{\Omega}\left[u\delta(x-a)\delta(y-b) - Gf(x,y)\right]dA \\ &= \iint_{\Omega} u\delta(x-a)\delta(y-b)dV - \iint_{\Omega} Gf(x,y)dA \\ &= u(a,b) - \iint_{\Omega} Gf(x,y)dA.\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menyelesaikan persamaan di atas untuk mencari $u(a,b)$ maka persamaan di atas dapat dimanipulasi secara aljabar sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u(a,b) = \iint_{\Omega} Gf(x,y)dA + \int_{\partial\Omega}\left[u(x,y)\nabla G - u(x,y)\nabla G\right].nds\,.$$

Apabila $u(a,b)$ dan $G(x,y;a,b)$ memenuhi syarat batas *Dirichlet* homogen yang diberikan maka $u(a,b)$ akan bernilai nol di seluruh domain syaray batasnya. Oleh karena itu, apabila $u(a,b)$ bernilai nol maka persamaan pada ruas kanan akan bernilai nol. Berdasarkan hal tersebut maka diperoleh:

$$\begin{aligned}u(a,b) &= \iint_{\Omega} G(x,y;a,b)f(x,y)dA \\ &= \iint_{\Omega} G(x,y;a,b)f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

Karena persamaan Poisson yang diberikan didefinisikan dalam variabel x dan y maka variabel a dan b ditukar dengan x dan y dan variabel a dan b ditukar dengan variabel x dan y sehingga persamaan di atas dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(a,b;x,y)f(a,b)dadb\,.$$

Selanjutnya karena fungsi Green bersifat simeteris berdasarkan Teorema 1 maka ekspresi $G(a,b;x,y)$ akan sama dengan $G(x,y;a,b)$. Berdasarkan hal tersebut maka persamaan solusi $u(x,y)$ di atas dapat dituliskan sebagai:

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;a,b)f(a,b)dadb\,.$$

Dapat dilihat dari persamaan di atas bahwa jika dapat ditemukan fungsi Green yang merupakan $G(x,y;a,b)$ maka solusi untuk persamaan Poisson yang merupakan $u(x,y)$ dapat ditentukan.

Konstruksi fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen dari persamaan Poisson

Bagian ini membahas mengenai bentuk fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen, diasumsikan nilai eigen yang digunakan tidak ada yang bernilai nol karena pada hasil akhir akan diperoleh bentuk pembagian dimana nilai eigen yang digunakan akan bertindak sebagai bagian dari penyebut. Langkah yang dilakukan adalah dengan memisalkan solusi $u(x,y)$ sebagai solusi yang dinyatakan dalam ekspansi fungsi eigen yang kemudian ditentukan konstanta fungsi eigennya. Setelah itu dengan menggunakan bentuk solusi persamaan poisson sebelumnya dapat ditentukan bentuk fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen.

Misalkan diberikan suatu persamaan Poisson:

$$\nabla^2 u(x,y) = -\lambda u(x,y). \qquad 0<x<L \;,\; 0<y<H \qquad L,H\in\mathbb{R}\,.$$

dengan syarat batas homogen sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}\text{a. } u(0,y)=0. & (0<y<H). & \\ \text{b. } u(L,y)=0. & (0<y<H). & \\ \text{c. } u(x,0)=0. & (0<x<L). & \\ \text{d. } u(x,H)=0. & (0<x<L). & \end{array} \qquad (8)$$

Diberikan operator ∇^2 sebagai operator linear diferensial yang memenuhi kondisi syarat batas (8) dan dalam masalah nilai eigen memiliki bentuk:

$$\nabla^2\tau_n = -\lambda_n\tau_n \quad n=1,2,3... \qquad (9)$$

dengan τ_n merupakan fungsi eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Pada bagian ini akan ditentukan solusi parsial u yang memenuhi $\nabla^2 u(x,y) = f(x,y)$ dan syarat batas (8). Misalkan solusi u dituliskan sebagai perluasan fungsi eigen yang memiliki bentuk:

$$u(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} k_n \tau_n(x,y) . \qquad n = 1,2,3... \tag{10}$$

dengan k_n merupakan nilai konstanta ekspansi eigen dari masalah syarat batas yang diberikan.

Kemudian dengan mendiferensialkan persamaan (10) pada kedua ruas menggunakan operator ∇^2 menghasilkan:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \nabla^2 \tau_n(x,y) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \tau_n(x,y) \\ &= f(x,y)\end{aligned}$$

atau

$$f(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \tau_n(x,y) . \tag{11}$$

Misalkan $\tau_m(x,y)$ juga merupakan fungsi eigen yang memenuhi syarat batas (8). Mengalikan kedua ruas dalam persamaan (11) dengan $\tau_m(x,y)$ akan menghasilkan

$$f(x,y)\tau_m(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \tau_n(x,y)\tau_m(x,y) . \tag{12}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas dalam persamaan (12) akan menghasilkan:

$$\int_0^H\int_0^L f(x,y)\tau_m(x,y)dxdy = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \int_0^H\int_0^L \tau_n(x,y)\tau_m(x,y)dxdy . \tag{13}$$

dengan $m = 1,2,3...$.

Kemudian dengan menggunakan sifat orthogonalitas fungsi eigen maka untuk nilai $n \neq m$ akan diperoleh nilai dari ruas kanan persamaan (13) akan bernilai nol. Selanjutnya apabila nilai $n = m$ pada ruas kanan dari persamaan (13) diperoleh:

$$\int_0^H\int_0^L f(x,y)\tau_m(x,y)dxdy = \lambda_m k_m \int_0^H\int_0^L \tau_m{}^2(x,y)dxdy . \tag{14}$$

Apabila variabel x dan y pada ruas kiri dinamakan sebagai a dan b maka persamaan (14) menjadi:

$$\int_0^H\int_0^L f(a,b)\tau_m(a,b)dadb = \lambda_m k_m \int_0^H\int_0^L \tau_m{}^2(x,y)dxdy . \tag{15}$$

Sehingga dengan menggunakan manipulasi secara aljabar dari persamaan (15) untuk mendapatkan nilai konstanta k_m diperoleh:

$$\begin{aligned}\lambda_m k_m \int_0^H\int_0^L \tau_m{}^2(x,y)dxdy &= \int_0^H\int_0^L f(a,b)\tau_m(a,b)dadb \\ k_m &= \frac{\int_0^H\int_0^L f(a,b)\tau_m(a,b)dadb}{\lambda_m \int_0^H\int_0^L \tau_m{}^2(x,y)dxdy}\end{aligned} \tag{16}$$

Kemudian nilai k_m disubtitusikan ke dalam persamaan (10). Konstanta m dalam persamaan (16) dapat disusun kembali dan ditulis sebagai n agar bersesuaian dengan bentuk solusi pada persamaan (10). Hal ini dapat dilakukan karena nilai m dan n pada kedua persamaan tersebut bernilai sama (keduanya berjalan dari $1,2,3...$). Sehingga dari penjelasan tersebut diperoleh:

$$u(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^H \int_0^L f(a,b)\tau_n(a,b)dadb}{\lambda_n \int_0^H \int_0^L \tau_n^{\,2}(x,y)dxdy} \tau_n(x,y)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^H \int_0^L \tau_n(x,y)\tau_n(a,b)f(a,b)dadb}{\lambda_n \int_0^H \int_0^L \tau_n^{\,2}(x,y)dxdy}.$$

$$u(x,y) = -\int_0^H \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n(x,y)\tau_n(a,b)}{\lambda_n \int_0^H \int_0^L \tau_n^{\,2}(x,y)dxdy} f(a,b)dadb. \qquad (17)$$

Kemudian dengan merujuk kepada bentuk umum solusi pada persamaan di atas dapat dilihat bahwa bentuk solusinya akan memiliki bentuk:

$$u(x,y) = \int\int G(x,y;a,b)f(a,b)dadb.$$

Sehingga dengan melihat kepada bentuk persamaan (17) dan bentuk umum solusi persamaan diferensial di atas akan diperoleh fungsi Green dari persamaan Poisson menggunakan ekspansi fungsi eigen sebagai berikut:

$$G(x,y;a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n(x,y)\tau_n(a,b)}{\lambda_n \int_0^H \int_0^L \tau_n^{\,2}(x,y)dxdy}. \qquad (18)$$

Selanjutnya berikut ini disajikan contoh kasus untuk menemukan fungsi Green dari persamaan Poisson dengan syarat batas tertentu. Contoh ini sudah dibahas oleh peneliti sebelumnya [6], namun di sini disajikan konstruksi yang lebih lengkap terutama pada saat perhitungan nilai eigennya dan di bagian hasil ahirnya.

Contoh 1. [6]. Misalkan diberikan sebuah persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u. \qquad 0 < x < L, 0 < y < H. \qquad L, H \in \mathbb{R}.$$

dengan syarat batas Dirichlet homogen:

a. $u(0,y) = 0. \qquad (0 < y < H).$
b. $u(L,y) = 0. \qquad (0 < y < H).$
c. $u(x,0) = 0. \qquad (0 < x < L).$
d. $u(x,H) = 0. \qquad (0 < x < L).$

Persamaan Poisson di atas akan diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel, yaitu salah satu dari beberapa metode yang biasa digunakan untuk menyeleseikan persamaan diferensial parsial yang memungkinkan untuk menulis ulang persamaan sehingga masing-masing variabel berada pada sisi yang berbeda hal ini bertujuan agar memudahkan dalam menyelesaikan persamaan.

Berdasarkan metode pemisahan variabel maka bentuk solusi dengan metode ini akan memiliki bentuk :

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \qquad (19)$$

Jika solusi di atas disubstitusikan ke dalam persamaan Poisson pada contoh maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = -\lambda X(x)Y(y). \qquad (20)$$

Apabila persamaan di atas pada masing-masing ruas dibagi dengan $X(x)Y(y)$ maka akan diperoleh:

$$\frac{X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x)}{X(x)Y(y)} = \frac{-\lambda X(x)Y(y)}{X(x)Y(y)}. \qquad (21)$$

Persamaan (21) akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}&=-\lambda \\ \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda&=0. \end{aligned} \tag{22}$$

Kemudian kedua ruas dipisahkan berdasarkan variabelnya masing-masing. Persamaan (22) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)}&=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda \\ \frac{X''(x)}{Y(y)}&=-\frac{Y''(y)-\lambda Y(y)}{Y(y)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Selanjutnya apabila persamaan (23) dikalikan dengan (-1) maka akan diperoleh:

$$-\frac{X''(x)}{Y(y)}=\frac{Y''(y)+\lambda Y(y)}{Y(y)}. \tag{24}$$

Persamaan (24) memperlihatkan bahwa pada kedua ruas masing-masing ruas merupakan fungsi dalam satu variabel sehingga hasil bagi pada masing-masing ruas haruslah merupakan suatu konstanta, misalkan $\omega\in\mathbb{R}$. Persamaan (24) kemudian dapat dituliskan sebagai dua persamaan yaitu:

Untuk persamaan di ruas kiri diperoleh:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\omega \quad \text{atau} \quad \begin{aligned} -X''(x)&=\omega X(x) \\ -X''(x)-\omega X(x)&=0 \\ X''(x)+\omega X(x)&=0. \end{aligned} \tag{25}$$

Untuk persamaan di ruas kanan diperoleh:

$$\frac{Y''(y)+\lambda Y(y)}{Y(y)}=\omega \quad \text{atau} \quad \begin{aligned} Y''(y)+\lambda Y(y)&=\omega Y(y) \\ Y''(y)+\lambda Y(y)-\omega Y(y)&=0 \\ Y''(y)+(\lambda-\omega)Y(y)&=0 \\ Y''(y)-(\omega-\lambda)Y(y)&=0. \end{aligned} \tag{26}$$

berdasarkan persamaan (25) dan (26) diperoleh dua persamaan diferensial biasa yaitu:

$$X''(x)+\omega X(x)=0\,. \tag{27}$$

dan

$$Y''(y)-(\omega-\lambda)Y(y)=0\,. \tag{28}$$

Selanjutnya jika syarat batas (a) dan (b) pada contoh disubstitusikan ke dalam persamaan (19) maka akan diperoleh:

$$u(0,y)=X(0)Y(y)=0\,. \tag{29}$$

dan

$$u(L,y)=X(L)Y(y)=0\,. \tag{30}$$

Apabila memperhatikan bentuk solusi menggunakan metode pemisahan variabel yaitu $u(x,y)=X(x)Y(y)$ dan dengan memperhatikan bentuk persamaan (29) maka nilai $Y(y)$ pada persamaan (29) haruslah tidak bernilai nol. Karena apabila nilai $Y(y)$ bernilai nol, maka solusi $u(x,y)$ yang diperoleh akan trivial. Oleh karena itu agar persamaan (29) dapat terpenuhi maka dipilih nilai $X(0)=0$.

Karena nilai $Y(y)$ tidak sama dengan nol, maka nilai $X(L)$ pada persamaan (30) haruslah bernilai nol agar persamaan tersebut dapat dipenuhi. Sehingga dari penjelasan tersebut di atas maka diperoleh bahwa nilai $X(0)=0$ dan nilai $X(L)=0$. Dengan demikian diperoleh bahwa:

$$X(0)=X(L)=0\,. \tag{31}$$

Kemudian apabila syarat batas Dirichlet c dan d disubstitusikan ke dalam persamaan (19) maka akan diperoleh persamaan-persamaan:

$$u(X,0)=X(x)Y(0)=0\,. \tag{32}$$

dan

$$u(X,H) = X(x)Y(H) = 0. \tag{33}$$

Karena solusi yang diharapkan non-trivial maka berdasarkan persamaan di atas dipilih nilai $Y(0)=0$ dan $Y(H)=0$. Karena jika dipilih nilai $X(x)=0$ pada kedua persamaan di atas maka akan diperoleh solusi trivial berdasarkan bentuk solusi pada persamaan (19). Sehingga dari penjelasan di atas diperoleh:

$$Y(0) = Y(H) = 0. \tag{34}$$

Selanjutnya berdasarkan PDB yang terbentuk pada persamaan (27) dan (28) maka diperoleh persamaan karakteristik untuk masing-masing PDB tersebut.

Pada bagian ini akan dianalisis solusi untuk masing-masing PDB melalui persamaan karakteristik yang terbentuk. Teknik penyelesaian yang digunakan adalah teknik penyelesaian PDB orde dua.

Untuk persamaan $X''(x)+\omega X(x)=0$ diperoleh persamaan karakteristik $\sigma^2+\omega=0$ atau diperoleh nilai $\sigma^2=-\omega$. Karena ω merupakan suatu konstanta Real maka nilai ω dapat berbentuk $\omega>0$, $\omega=0$ atau $\omega<0$. Keseluruhan nilai ω yang mungkin akan diuji untuk melihat solusi yang terbentuk.

Langkah pertama akan ditentukan solusi dalam $X(x)$ yang merupakan solusi persamaan (27). Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas pada persamaan (31). Untuk menentukan solusi ini maka kemungkinan nilai-nilai ω akan diuji.

i. Nilai $\omega>0$

Untuk nilai $\omega>0$ maka diperoleh nilai $\sigma=\pm\sqrt{-\omega}$. Jika dituliskan dalam bentuk bilangan kompleks, maka diperoleh nilai $\sigma=\pm i\sqrt{\omega}$. Sehingga dengan menggunakan teknik penyelesaian persamaan diferensial biasa linear homogen orde diperoleh solusi $X(x)$ yaitu:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{i\sqrt{\omega}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega}x} \\ &= c_1 \cos\sqrt{\omega}x + c_2 \sin\sqrt{\omega}x. \end{aligned} \tag{35}$$

dengan $c_{1,}c_2$ merupakan anggota bilangan real.

Apabila syarat batas $X(0)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (35) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} c_1 \cos\sqrt{\omega}(0) + c_2 \sin\sqrt{\omega}(0) &= 0 \\ c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) &= 0 \\ c_1 + 0 &= 0 \\ c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu dengan mensubstitusikan hasil di atas ke dalam persamaan (35) maka diperoleh:

$$X(x) = c_2 \sin\sqrt{\omega}x. \tag{36}$$

Selanjutnya apabila batas $X(L)=0$ disubtitusikan ke persamaan (35) maka akan diperoleh nilai $c_2=0$ atau nilai $\sin\sqrt{\omega}L=0$. Dari persamaan (27) dapat dilihat bahwa persamaan tersebut homogen sehingga diperlukan nilai $X(x)$ yang sama dengan nol. Untuk itu karena $c_2=0$ merupakan suatu konstanta maka diperlukan nilai $\sin\sqrt{\omega}L=0$ sebagai pembuat persamaan (27) homogen (bernilai nol). Nilai pembuat nol pada $\sin\sqrt{\omega}L=0$ adalah $\sqrt{\omega}L=0$. Mengacu kepada sifat nilai fungsi sinus, untuk mendapatkan nilai maka nilai nol maka $\sqrt{\omega}L$ haruslah merupakan fungsi periodik yang berupa $\sqrt{\omega}L=j\pi$ dengan $j=1,2,3,...,.$. Sehingga diperoleh nilai $\omega_j=\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$. Sehingga diperoleh solusi untuk nilai $\omega>0$ adalah $X_j(x)=c_2\sin\sqrt{\omega_j}x$.

ii. Nilai $\omega=0$.

Apabila nilai $\omega=0$ disubstitusikan ke persamaan (27) maka diperoleh nilai $X''(x)=0$. Sehingga untuk nilai ini diperoleh solusi yaitu:

$$X(x) = c_3 + c_4 x. \tag{37}$$

dengan c_3, c_4 merupakan anggota bilangan Real.

Kemudian dengan mengambil syarat batas $X(0)=0$ maka diperoleh hasil dari persamaan (37) yaitu:

$$c_3 + c_4(0) = 0$$
$$c_3 = 0.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan hasil di atas ke dalam persamaan (37) diperoleh solusi untuk syarata batas $X(x)=0$ yaitu:

$$X(x) = c_4 x \,. \tag{38}$$

Oleh karena itu dengan mengambil syarat batas $X(L)=0$ maka diperoleh hasil dari persamaan (38) yaitu $c_4 L = 0$ atau $c_4 = 0$.
Kemudian dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam persamaan (38) maka diperoleh solusi untuk syarat batas $X(L)=0$ yaitu:

$$\begin{aligned} X(x) &= c_4 x \\ &= 0x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Solusi ini merupakan solusi trivial.

iii. Nilai $\omega < 0$

Apabila nilai $\omega < 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan karakteristik yang terbentuk maka diperoleh nilai $\sigma = \pm\sqrt{-\omega}$. Selanjutnya dengan menggunakan teknik solusi PDB linear homogen orde dua untuk persamaan (27) maka diperoleh solusi:

$$X(x) = c_5 e^{\sqrt{-\omega x}} + c_6 e^{-\sqrt{-\omega x}} \,. \tag{39}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan syarat batas $X(0)=0$ ke dalam persamaan (39) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} c_5 e^{\sqrt{-\omega(0)}} + c_6 e^{-\sqrt{-\omega(0)}} &= 0 \\ c_5 + c_6 &= 0 \\ c_5 &= -c_6. \end{aligned} \tag{40}$$

Apabila nilai konstanta yang diperoleh pada persamaan (40) disubstitusikan ke dalam persamaan (39) sehingga diperoleh solusi:

$$\begin{aligned} X(x) &= -c_6 e^{-\sqrt{-\omega x}} + c_6 e^{\sqrt{-\omega x}} \\ &= c_6 (e^{\sqrt{-\omega x}} - e^{-\sqrt{-\omega x}}). \end{aligned} \tag{41}$$

Selanjutnya syarat batas $X(L)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (41) sehingga diperoleh $X(L) = c_6(e^{\sqrt{-\omega L}} - e^{-\sqrt{-\omega L}}) = 0$. Kemudian persamaan ini diuraikan untuk mendapatkan konstanta-konstantanya sebagai berikut.
Karena nilai $c_6(e^{\sqrt{-\omega L}} - e^{-\sqrt{-\omega L}}) = 0$ dan jelas terlihat bahwa nilai $(e^{\sqrt{-\omega L}} - e^{-\sqrt{-\omega L}}) \neq 0$, maka dapat disimpulkan bahwa nilai $c_6 = 0$. Apabila nilai $c_6 = 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (41) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} X(x) &= 0(e^{\sqrt{-\omega L}} - e^{-\sqrt{-\omega L}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Solusi ini juga merupakan solusi trivial.
Sehingga setelah melihat bentuk solusi dari tiga kemungkinan nilai ω yang telah diuji maka diperoleh solusi untuk persamaan pertama (27) menggunakan syarat batas (31) yaitu:

$$X_j(x) = c_2 \sin\sqrt{\omega_j x} \,. \tag{42}$$

dengan $\omega_j = \left(\dfrac{j\pi}{L}\right)^2$, $j \in \mathbb{N}$.

Pada bagian ini akan ditentukan solusi dalam $Y(y)$.

Berdasarkan persamaan kedua dalam sistem PDB pada persamaan (28) dan syarat batas pada persamaan (34) akan ditentukan solusi PDB tersebut.

Dapat dilihat bahwa bentuk persamaan karakteristik untuk persamaan (28) adalah $\ell^2-(\lambda-\omega)=0$ atau $\ell^2=(\lambda-\omega)$. Misalkan $(\lambda-\omega)=\alpha$ yang berarti $\lambda=\omega+\alpha$ maka persamaan karakteristik di atas menjadi $\ell^2=\alpha$ atau $\ell=\pm\sqrt{\alpha}$. Selanjutnya dapat dilihat bahwa nilai α pada persamaan sebelumnya dapat bervariasi berupa $\alpha>0, \alpha=0$ dan $\alpha<0$.

Kemudian untuk dapat menentukan solusi dalam $Y(y)$ maka ketiga nilai α tersebut diuji. Pengujian ini menggunakan syarat batas (34).

i. Nilai $\alpha>0$

Apabila nilai $\alpha>0$ maka berdasarkan teknik solusi untuk persamaan diferensial biasa linear homogen orde dua dengan konstanta riil berbeda maka diperoleh solusi untuk $Y(y)$ adalah:

$$Y(y)=c_7e^{\sqrt{\alpha y}}+c_8e^{-\sqrt{\alpha y}}. \tag{43}$$

Selanjutnya dengan memasukkan syarat batas $Y(0)=0$ ke dalam persamaan (43) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_7e^{\sqrt{\alpha(0)}}+c_8e^{-\sqrt{\alpha(0)}}&=0\\ c_7e^0+c_8e^0&=0\\ c_7&=-c_8. \end{aligned} \tag{44}$$

Kemudian hasil dari persamaan (44) disubstitusikan ke dalam persamaan (43) sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Y(y)&=-c_8e^{\sqrt{\alpha y}}+c_8e^{-\sqrt{\alpha y}}\\ &=c_8(e^{-\sqrt{\alpha y}}-e^{\sqrt{\alpha y}}). \end{aligned} \tag{45}$$

Sehingga apabila syarat batas $Y(H)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (45) maka diperoleh bahwa $c_8(e^{-\sqrt{\alpha H}}-e^{\sqrt{\alpha H}})=0$. Namun jelas terlihat bahwa nilai $(e^{-\sqrt{\alpha H}}-e^{\sqrt{\alpha H}})\neq 0$ sehingga diperoleh bahwa nilai $c_8=0$. Jika nilai ini disubstitusikan ke dalam persamaan (45) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Y(y)&=0(e^{-\sqrt{\alpha y}}-e^{\sqrt{\alpha y}})\\ &=0. \end{aligned} \tag{46}$$

Oleh karena itu dengan mengambil $\alpha>0$ diperoleh solusi trivial untuk PDB pada persamaan (28).

ii. $\alpha=0$

Apabila nilai $\alpha=0$ maka diperoleh dari persamaan (28) bahwa $Y''(y)=0$. Menggunakan teknik solusi untuk PDB linear homogen orde 2 maka diperoleh solusi untuk $Y''(y)=0$ adalah:

$$Y(y)=c_9+c_{10}y. \tag{47}$$

Selanjutnya syarat batas $Y(0)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan di atas sehingga diperoleh $c_9+c_{10}0=0$ atau $c_9=0$. Hasil ini kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (23) sehingga diperoleh solusi:

$$Y(y)=c_{10}y. \tag{48}$$

Kemudian syarat batas $Y(H)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan di atas sehingga diperoleh hasil $c_{10}H=0$ atau $c_{10}=0$. Hasil ini disubstitusikan ke dalam persamaan (47) sehingga diperoleh solusi:

$$\begin{aligned} Y(y)&=c_{10}y\\ &=0y\\ &=0. \end{aligned}$$

Solusi ini merupakan solusi trivial.

iii. Nilai $\alpha<0$

Apabila nilai $\alpha<0$ maka nilai akar-akar persamaan karakteristiknya akan bernilai $\ell=\pm i\sqrt{\alpha}$. Nilai ini merupakan bilangan kompleks dengan dua bilangan yang berbeda. Maka dengan menggunakan teknik solusi untuk PDB linear homogen orde dua diperoleh solusi sebagai berikut:

$$Y(y)=c_{11}e^{i\sqrt{\alpha y}}+c_{12}e^{-i\sqrt{\alpha y}}.$$

atau solusi di atas dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu:

$$Y(y)=c_{11}\cos\sqrt{\alpha}\,y+c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,y. \tag{49}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan syarat batas $Y(0)=0$ ke dalam persamaan (25) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} c_{11}\cos\sqrt{\alpha}\,0+c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,0&=0\\ c_{11}\cos(0)+c_{12}\sin(0)&=0\\ c_{11}&=0. \end{aligned}$$

Nilai konstanta yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (49) sehingga persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} Y(y)&=c_{11}\cos\sqrt{\alpha}\,y+c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,y\\ &=0\cos\sqrt{\alpha}\,y+c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,y\\ &=c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,y. \end{aligned} \tag{50}$$

Kemudian syarat batas $Y(H)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (50) sehingga diperoleh $c_{12}\sin\sqrt{\alpha}H=0$. Nilai-nilai yang mungkin untuk persamaan ini adalah $c_{12}=0$ atau $\sin\sqrt{\alpha}H=0$. Karena solusi yang diinginkan adalah solusi non-trivial maka dipilih nilai $\sin\sqrt{\alpha}H=0$. Agar nilai $\sin\sqrt{\alpha}H=0$ maka $\sqrt{\alpha}H$ haruslah merupakan suatu fungsi periodik dengan konstanta bilangan asli. Sehingga diperoleh $\sqrt{\alpha}H=k\pi$ untuk sembarang $k\in\mathbb{N}$. Kemudian dari persamaan tersebut diperoleh $\alpha=\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2$. Sehingga solusi umum untuk nilai $\alpha<0$ adalah $Y_k(y)=c_{12}\sin\sqrt{\alpha}\,y$.

Apabila dilihat kembali hasil pada penyelesaian persamaan karakteristik untuk PDB pada persamaan (28) maka diperoleh bahwa nilai $\omega>0$ memberikan nilai eigen $\omega_j=\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$ dan fungsi eigennya adalah $X_j(x)=c_2\sin\sqrt{\omega_j x}$ dengan $j=1,2,3\ldots$. Selanjutnya karena telah dimisalkan bahwa $\lambda-\omega=\alpha$ atau $\lambda=\omega+\alpha$ dengan $\alpha=\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2$ dan diperoleh hubungan $\lambda_{j,k}=\omega_j+\alpha_k$, sehingga diperoleh nilai $\lambda_{j,k}$ yaitu,

$$\lambda_{j,k}=\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2. \qquad j,k\in\mathbb{N}.$$

Kemudian dengan melihat bentuk umum solusi pada persamaan (8) dan mengambil hasil solusi dari persamaan karakteristik kedua PDB pada persamaan (28) dan (29) maka diperoleh solusi yaitu:

$$\begin{aligned} u_{j,k}(x,y)&=c_{j,k}\sin\sqrt{\omega}x\sin\sqrt{\alpha}\,y\\ &=c_{j,k}\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}. \end{aligned} \tag{51}$$

dengan $j,k\in\mathbb{N}$ dan $c\in\mathbb{R}$.

Prinsip superposisi menyatakan bahwa kombinasi linear dari solusi suatu persamaan diferensial juga merupakan solusinya. Berdasarkan hal ini diperoleh persamaan (27) menjadi:

$$u(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_{j,k}\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right). \tag{52}$$

Selanjutnya dengan mengacu kepada persamaan di atas dan merujuk kepada bentuk solusi untuk ekspansi fungsi eigen pada persamaan (10) dengan:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\tau_n(x,y)$$

maka diperoleh nilai $\tau_n(x,y)$ yaitu:

$$\tau_n(x,y)=\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right). \tag{53}$$

Sehingga diperoleh nilai $\tau_n{}^2(x,y)$ yaitu:

$$\tau_n{}^2(x,y)=\left(\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right)^2. \tag{54}$$

Kemudian dari bentuk solusi pada persamaan (17) akan ditentukan nilai dari $\int_0^H\int_0^L \tau_n{}^2(x,y)dxdy$.

$$\begin{aligned}\int_0^H\int_0^L \tau_n{}^2(x,y)dxdy &= \int_0^H\int_0^L\left(\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\right)^2 dxdy\\ &= \int_0^H\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)dxdy\\ &= \int_0^H \sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\left(\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx\right)dy.\end{aligned} \tag{55}$$

Berdasarkan persamaan (55), pengerjaan integral akan lebih dulu dikerjakan dalam variabel x sehingga akan ditentukan hasil dari $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$.

Integral $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$ akan diselesaikan menggunakan integral substitusi. Integral substitusi dengan memisalkan salah satu komponen pengintegralan (biasanya fungsi atau variabel) yang mana ketika diturunkan terhadap variabelnya dapat menyederhanakan komponen antiturunan dalam integral tersebut. Sehingga kemudian untuk mengerjakan $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$ akan ditentukan komponen yang dimisalkan dan turunannya terhadap variabelnya.

Misalkan dari $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$:

$$u=\frac{j\pi x}{L} \quad \text{maka} \quad du=\frac{j\pi}{L}dx \quad \text{atau} \quad \frac{L}{j\pi}du=dx.$$

Karena $\frac{L}{j\pi}du$ dapat menyederhanakan atau mengganti dx maka $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$ dapat dikerjakan dengan intergral substitusi.

Karena telah dimisalkan bahwa $dx=\frac{L}{j\pi}du$ maka bentuk $\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$ akan menjadi:

$$\begin{aligned}\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx &= \int_0^L \frac{L}{j\pi}\sin^2 udu\\ &= \frac{L}{j\pi}\int_0^L \sin^2 udu.\end{aligned} \tag{56}$$

Namun karena variabel pengintegralan diubah, maka variabel batas pengintegralan juga harus diubah. Karena batas pengintegralan dalam x berada dalam interval $(0,L)$ maka ketika sebelumnya dimisalkan bahwa $u=\frac{j\pi x}{L}$ akan diperoleh batas pengintegralan baru dalam u sebagai berikut:

Jika $x=0$ maka $u=\dfrac{j\pi(0)}{L}=0$.

Jika $x=L$ maka $u=\dfrac{j\pi L}{L}=j\pi$.

Sehingga diperoleh batas pengintegralan dalam u berada dalam interval $(0, j\pi)$. Sehingga persamaan (56) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{j\pi}\int_0^{j\pi}\sin^2 u du. \tag{57}$$

Selanjutnya akan dikerjakan $\int_0^{j\pi}\sin^2 u du$. Melalui identitas trigonometri, bentuk $\sin^2 u$ dapat dituliskan sebagai $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}$. Sehingga bentuk integral yang akan dikerjakan menjadi $\int_0^{j\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}du$.

$$\begin{aligned}\int_0^{j\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}du &= \int_0^{j\pi}\frac{1}{2}du-\int_0^{j\pi}\frac{\cos 2u}{2}du \quad \text{(sifat linearitas operator integral)}\\ &=\frac{1}{2}u\Big|_0^{j\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{j\pi}\cos 2u du.\end{aligned} \tag{58}$$

Kemudian akan dikerjakan integral $\int_0^{j\pi}\cos 2u du$. Integral ini akan dikerjakan dengan integral substitusi dengan pemisalan sebagai berikut:

Misalkan $w=2u$ maka $dw=2du$ atau $\frac{1}{2}w=du$.

Karena variabel pengintegralan diubah ke dalam w maka batas pengintegralannya juga harus diubah menjadi batas pengintegralan dalam w. Batas pengintegralan dalam u berada dalam interval $(0, j\pi)$ sehingga diperoleh.

Untuk $u=0$ maka $w=2(0)=0$.

Untuk $u=j\pi$ maka $w=2j\pi$.

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_0^{j\pi}\cos 2u du &= \frac{1}{2}\int_0^{2j\pi}\cos w dw\\ &=\frac{1}{2}\sin w\Big|_0^{2j\pi}\\ &=\frac{1}{2}\sin(2j\pi)-\frac{1}{2}\sin(0)\\ &=\frac{1}{2}(0)-(0) \qquad \text{(nilai } \sin j\pi \text{ akan selalu bernilai nol untuk } j\in\mathbb{N})\\ &=0.\end{aligned} \tag{59}$$

Berdasarkan hal diatas dengan demikian diperoleh hasil dari $\int_0^{j\pi}\cos 2u du=0$. Selanjutnya hasil ini disubstitusikan ke dalam persamaan (58) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_0^{j\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}\right)du &= \frac{1}{2}u\Big|_0^{j\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{j\pi}\cos 2u du\\ &=\left(\frac{1}{2}(j\pi)-\frac{1}{2}(0)\right)-\frac{1}{2}(0)\\ &=\frac{j\pi}{2}.\end{aligned} \tag{60}$$

Karena $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}=\sin^2 u$ maka $\int_0^{j\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2u}{2}\right)du=\int_0^{j\pi}\sin^2 u du$. Sehingga dari persamaan (60) diperoleh hasil dari $\int_0^{j\pi}\sin^2 u du=\frac{j\pi}{2}$. Selanjutnya hasil ini disubtitusikan ke dalam persamaan (57) sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_0^{L}\sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx &= \frac{L}{j\pi}\int_0^{j\pi}\sin^2 u du\\ &=\frac{L}{j\pi}\left(\frac{j\pi}{2}\right)\\ &=\frac{L}{2}.\end{aligned} \tag{61}$$

Berdasarkan persamaan (61) diperoleh bahwa $\int_0^{L}\sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{2}$.

Setelah mendapatkan hasil dari $\int_0^{L}\sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx$, selanjutnya persamaan (55) akan menjadi:

$$\int_0^{H}\sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\left(\int_0^{L}\sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx\right)dy=\int_0^{H}\sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\left(\frac{L}{2}\right)dy. \tag{62}$$

Kemudian integral pada persamaan (52) akan diselesaikan. Integral ini akan diselesaikan menggunakan integral subtitusi. Menggunakan teknik penyelesaian yang sama seperti sebelumnya maka didapat hasil yaitu:

$$\int_0^{H}\sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)dy=\frac{H}{2}. \tag{63}$$

Hasil dari persamaan (63) disubtitusikan ke dalam persamaan (62) sehingga diperoleh:

$$\int_0^{H}\sin^2\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\left(\int_0^{L}\sin^2\left(\frac{j\pi x}{L}\right)dx\right)dy=\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{H}{2}\right). \tag{64}$$

Kemudian hasil dari persamaan (64) disubtitusikan ke dalam persamaan (55) sehingga diperoleh:

$$\int_0^{H}\int_0^{L}\tau_n^{\,2}(x,y)dxdy=\frac{L}{2}\frac{H}{2}. \tag{65}$$

Persamaan (65) dan persamaan (52) dengan $\lambda_{j,k}=\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2 \quad j,k\in\mathbb{N}$, disubtitusikan ke dalam fungsi Green yang telah dikonstruksi pada persamaan (18) dengan:

$$G(x,y;a,b)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n(x,y)\tau_n(a,b)}{\lambda_n\int_0^{H}\int_0^{L}\tau_n^{\,2}(x,y)dxdy}.$$

Sehingga dari persamaan di atas diperoleh:

$$G(x,y;a,b)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}\sin\frac{j\pi a}{L}\sin\frac{k\pi b}{H}}{\left(\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2\right)\frac{LH}{4}}.$$

$$G(x,y;a,b)=\frac{4}{LH}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}\sin\frac{j\pi a}{L}\sin\frac{k\pi b}{H}}{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2}.$$

Kemudian dengan melihat gambaran solusi umum persamaan Poisson pada persamaan (17) maka diperoleh solusi untuk persamaan Poisson adalah:

$$u(x,y)=\int_0^L\int_0^H\frac{-4}{LH}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}\sin\frac{j\pi a}{L}\sin\frac{k\pi b}{H}}{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2}f(a,b)dadb.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan membahas mengenai analisis penerapan persamaan Poisson dalam elektrostatika. Persamaan Poisson dalam elektrostatika memungkinkan untuk menemukan medan potensial dalam suatu daerah yang terbatas oleh massa jenis potensial atau arus.

Penurunan persamaan Poisson untuk medan potensial listrik

Misalnya diberikan ∇ merupakan operator del dengan definisi $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$, V merupakan potensial listrik, D merupakan massa jenis fluks listrik, ρ_v merupakan massa jenis volume arus, ε merupakan permetivitas (kuantitas fisik yang menggambarkan bagaimana medan listrik mempengaruhi dan dipengaruhi oleh suatu medium) dan E merupakan intensitas medan listrik. Hukum Gauss untuk medan potensial listrik mengatakan bahwa [3]:

$$\nabla.D=\rho_v. \tag{66}$$

dengan nilai $D=\varepsilon E$, dan nilai $E=-\nabla V$.

Kemudian dengan melakukan subtitusi nilai D ke dalam persamaan (66) akan diperoleh bahwa:

$$\nabla.D=\nabla.\varepsilon E$$

Sehingga dengan mensubstitusikan nilai E ke dalam persamaan di atas diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}\nabla.D&=\nabla\varepsilon\left(-\nabla.V\right)\\&=-\nabla.\nabla\left(\varepsilon V\right).\end{aligned}$$

Selanjutnya karena diketahui bahwa $\nabla.D=\rho_v$ dari persamaan (66) maka dengan mensubstitusikan nilai $\nabla.D=-\nabla.\nabla\left(\varepsilon V\right)$ ke dalam persamaan (66) diperoleh bahwa:

$$-\nabla.\nabla\left(\varepsilon V\right)=\rho_v. \tag{67}$$

Sehingga dengan melakukan manipulasi secara aljabar dari persamaan (67) diperoleh bahwa:

$$\nabla.\nabla V=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}. \tag{68}$$

Persamaan (68) merupakan persamaan Poisson dengan operator $\nabla.\nabla$. Selanjutnya misalkan medan potensial listrik V terdefinisi dalam domain $V(x,y,z)$. Karena V merupakan fungsi skalar, sehingga apabila V dikenakan operator ∇ diperoleh:

$$\begin{aligned}\nabla .V &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)V \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}i + \frac{\partial V}{\partial y}j + \frac{\partial V}{\partial z}k.\end{aligned} \tag{69}$$

Apabila operator pada persamaan (69) dikenakan kembali dengan operator yang sama maka akan diperoleh operator baru yang merupakan operator *laplacian.* Berdasarkan hal tersebut maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\nabla .\nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}i\left(\frac{\partial V}{\partial x}i\right) + \frac{\partial}{\partial y}j\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)j + \frac{\partial}{\partial z}k\left(\frac{\partial V}{\partial z}k\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{70}$$

Operator $\nabla.\nabla$ selanjutnya dituliskan sebagai ∇^2. Sehingga persamaan (70) dengan mengikuti bentuk persamaan (68) diperoleh sebagai:

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial z} \\ &= -\frac{\rho_v}{\varepsilon}.\end{aligned} \tag{71}$$

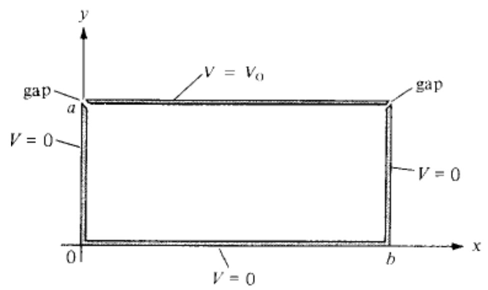
Selanjutnya persamaan (71) merupakan persamaan Poisson untuk medan potensial listrik. Apabila nilai $-\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ pada persamaan (71) bernilai nol maka Persamaan Poisson pada persamaan tersebut akan menjadi persamaan Laplace (kasus khusus persamaan Poisson). Nilai $-\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ mungkin untuk bernilai nol karena dimungkinkan adanya batas-batas homogen dalam kasus yang diberikan dimana nilai potensial listrik pada batas-batas tersebut bernilai nol yang berakibat massa jenis arusnya juga akan bernilai nol.

Medan potensial listrik pada suatu daerah persegi panjang

Bagian ini akan membahas mengenai solusi persamaan medan potensial listrik yang berupa persamaan laplace (kasus khusus persamaan Poisson). Setelah ditemukan solusinya kemudian akan dilihat nilai potensial listrik pada titik tertentu dengan nilai awal dan nilai batas tertentu. Selanjutnya akan dibentuk fungsi Green dari solusi persamaan medan potensial listrik tersebut.

Misalkan diberikan suatu daerah berupa persegi panjang seperti pada Gambar 1.

- Akan ditentukan fungsi potensial yang merupakan solusi persamaan laplace (kasus khusus persamaan Poisson) untuk memodelkan potensial listrik pada daerah tersebut dan fungsi Green dari fungsi potensial yang terbentuk.
- Akan ditentukan nilai potensial listrik pada $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{5}$ dengan $b = 2a$ untuk $V_0 = 150$.



Gambar 1. Daerah Persegi Panjang

Medan potensial listrik dimodelkan dengan persamaan Laplace sebagai berikut:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 . \qquad .(72)$$

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh syarat-syarat batas sebagai berikut (Dirichlet)

$0 < x \leq b$ dan $0 < y \leq a$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan:

$$V(0, y) = 0 . \qquad (73)$$

$$V(b, y) = 0 . \qquad (74)$$

$$V(x, 0) = 0 . \qquad (75)$$

$$V(x, a) = V_0 . \qquad (76)$$

Selanjutnya persamaan (72) akan diselesaikan berdasarkan syarat batas di atas dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Misalkan solusi untuk persamaan (72) berbentuk

$$V(x, y) = X(x)Y(y) . \qquad (77)$$

Dengan X adalah fungsi yang hanya bergantung kepada variabel x dan Y adalah fungsi yang hanya bergantung kepada variabel y . Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (77) ke dalam persamaan (72) maka diperoleh

$$X''Y + Y''X = 0 . \qquad (78)$$

Kemudian persamaan (77) masing-masing kedua ruas dibagi dengan XY sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{X''Y}{XY} + \frac{Y''X}{XY} &= 0 \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} \\ \frac{-X''}{X} &= \frac{Y''}{Y}. \end{aligned} \qquad (79)$$

Melihat bentuk persamaan (79) karena kedua ruas masing-masing hanya bergantung kepada x untuk ruas kiri dan y untuk ruas kanan maka agar keduanya setara hasil bagi keduanya haruslah sebuah konstanta, misalkan k .

$$\frac{-X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = k . \qquad (80)$$

Konstanta k yang diperoleh merupakan konstanta pemisah. Berdasarkan persamaan (80) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{-X''}{X} &= k \\ -X'' &= kX \\ -X'' - kX &= 0 \\ X'' + kX &= 0. \end{aligned} \qquad (81)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{Y''}{Y} &= k \\ Y'' &= kY \\ Y'' - kY &= 0. \end{aligned} \qquad (82)$$

Diperoleh dari persamaan (81) dan (82) bahwa variabel-variabelnya telah terpisah dan menjadi dua Persamaan Diferensial Biasa. Selanjutnya akan diselesaikan solusi untuk $X(x)$ dan $Y(y)$ secara terpisah dan kemudian hasilnya disubtitusikan ke dalam persamaan (77). untuk melakukan pekerjaan ini kita membutuhkan syarat batas dalam persamaan (73 – 76) secara terpisah. Dengan melalukan pemisahan syarat batas diperoleh:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 . \qquad (83)$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \rightarrow X(b) = 0 . \qquad (84)$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 . \qquad (85)$$

$$V(x, a) = X(x)Y(a) = V_0 \text{ (tidak dapat dipisah).} \qquad (86)$$

Persamaan (77) akan diselesaikan dengan syarat batas (83 – 86). Melihat bentuk PDB hasil pemisahan variabel maka nilai-nilai λ yang mungkin pada kedua PDB tersebut akan digunakan untuk melihat solusi yang sesuai dengan syarat batas (83-86).
Berdasarkan PDB yang terbentuk pada persamaan (80) dan (81) maka dapat dibentuk dua persamaan karakteristik yang bersesuaian.
Sebagai langkah pertama akan diselesaikan persamaan karakteristik PDB pertama yaitu $j^2+k=0$ atau $j^2=-k$ atau $j=\pm\sqrt{-k}$. Dari persamaan ini maka terdapat tiga nilai k yang mungkin yaitu, $k=0$, $k>0$ dan $k<0$. Selanjutnya akan ditentukan solusi persamaan karakteristik di atas dengan ketiga nilai k yang mungkin. Nilai k yang mungkin untuk nantinya solusi yang diperoleh akan digunakan adalah nilai k yang tidak mengakibatkan solusi trivial.

1. Nilai $k>0$

Untuk nilai $k>0$, maka diperoleh nilai $j=\pm\sqrt{-k}$. Nilai ini kemudian dituliskan dalam bentuk bilangan kompleks yaitu $j=\pm i\sqrt{k}$. Sehingga dengan menggunakan teknik penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde dua di PDB diperoleh solusi $X(x)$ yaitu:

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 e^{i\sqrt{k}x} + a_2 e^{-i\sqrt{k}x} \\ &= a_1 \cos\sqrt{k}x + a_2 \sin\sqrt{k}x. \end{aligned} \tag{87}$$

dengan $a_{1,}a_2$ merupakan konstanta bilangan real.
Kemudian apabila syarat batas $X(0)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan di atas maka diperoleh

$$\begin{aligned} a_1\cos\sqrt{k}(0)+a_2\sin\sqrt{k}(0)&=0 \\ a_1\cos(0)+a_2\sin(0)&=0 \\ a_1&=0. \end{aligned} \tag{88}$$

Selanjutnya hasil di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (87) sehingga diperoleh solusi

$$X(x)=a_2\sin\sqrt{k}x\,.$$

Kemudian syarat batas $X(b)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan di atas sehingga diperoleh nilai $a_2\sin\sqrt{k}b=0$. Hal ini mengisyaratkan bahwa nilai $a_2=0$ atau $\sin\sqrt{k}b=0$. Agar diperoleh solusi non trivial maka nilai a_2 haruslah tidak sama dengan nol. Sehingga dipilih nilai $\sin\sqrt{k}b=0$. Karena nilai $\sin\sqrt{k}b=0$ maka $\sqrt{k}b$ haruslah merupakan suatu fungsi periodik trigonometri, misalkan $\sqrt{k}b=n\pi$ dengan nilai $n=1,2,3,\ldots$. Sehingga diperoleh nilai $\sqrt{k}=\frac{n\pi}{b}$ atau $k=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Karena $n\pi$ merupakan suatu fungsi periodik maka nilai k bergantung pada nilai n sehingga diperoleh $k_n=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

Sehingga diperoleh solusi $X(x)$ untuk $k>0$ adalah

$$X(x)=a_2\sin\sqrt{k}x\,. \tag{89}$$

2. Nilai $k=0$.

Untuk nilai $k=0$, maka persaman (81) menjadi

$$X''(x)=0\,.$$

Sehingga diperoleh solusi untuk PDB tersebut adalah

$$X(x)=a_3+a_4x\,. \tag{90}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan syarat batas $X(0)=0$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} a_3+a_4(0)&=0 \\ a_3&=0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu dengan mensubstitusikan nilai $a_3=0$ ke dalam persamaan (90) maka diperoleh:

$$X(x) = a_4 x .$$

Selanjutnya dengan mengambil syarat batas $X(b) = 0$ untuk persamaan di atas akan diperoleh:

$$a_4 b = 0 \text{ atau } a_4 = 0 .$$

Kemudian merujuk kepada persamaan (90) berdasarkan nilai a_3 dan a_4 yang diperoleh maka didapatkan solusi yaitu:

$$\begin{aligned} X(x) &= a_3 + a_4 x \\ &= 0 + 0x \\ &= 0. \end{aligned} \tag{91}$$

Karena diperoleh nilai $X(x) = 0$ maka nilai $k = 0$ mengakibatkan solusi berupa solusi trivial yang tidak diharapkan. Sehingga dengan demikian nilai $k = 0$ tidak digunakan.

3. Nilai $k < 0$

Apabila nilai $k < 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (17) maka diperoleh nilai persamaan karakteristik yaitu $j = \pm\sqrt{k}$. Kemudian dengan menggunakan teknik penyelesaian solusi untuk PDB homogen orde dua diperoleh solusi sebagai berikut.

$$X(x) = a_5 e^{\sqrt{k}x} + a_6 e^{-\sqrt{k}x} . \tag{92}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan syarat batas $X(0) = 0$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} a_5 e^{\sqrt{k}(0)} + a_6 e^{-\sqrt{k}(0)} &= 0 \\ a_5 + a_6 &= 0 \\ a_5 &= -a_6 . \end{aligned}$$

Sehingga dari hasil di atas diperoleh persamaan (92) menjadi

$$X(x) = -a_6 e^{\sqrt{k}x} + a_6 e^{-\sqrt{k}x} .$$

Atau

$$X(x) = a_6 (e^{-\sqrt{k}x} - e^{\sqrt{k}x}) . \tag{93}$$

Selanjutnya syarat batas $X(b) = 0$ disubtitusikan ke dalam persamaan (93) sehingga diperoleh $a_6 (e^{-\sqrt{k}b} - e^{\sqrt{k}b}) = 0$. Karena nilai $(e^{-\sqrt{k}b} - e^{\sqrt{k}b})$ tidak mungkin bernilai nol untuk semua variabelnya maka diambil nilai $a_6 = 0$. Jika nilai $a_6 = 0$, maka persamaan (93) menjadi:

$$\begin{aligned} X(x) &= a_6 (e^{-\sqrt{k}b} - e^{\sqrt{k}b}) \\ &= 0(e^{-\sqrt{k}b} - e^{\sqrt{k}b}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Diperoleh bahwa solusi yang terbentuk dengan mengambil nilai $k < 0$ menghasilkan bentuk solusi $X(x) = 0$. Solusi ini merupaka solusi trivial, dengan demikian nilai $k < 0$ tidak dapat digunakan.

Berdasarkan hasil dari ketiga nilai k yang mungkin yaitu, $k = 0$, $k > 0$ dan $k < 0$ dapat dilihat bahwa solusi non trivial hanya akan diperoleh untuk nilai $k > 0$. Nilai ini menghasilkan solusi $X(x) = a_2 \sin\sqrt{k}x$.

Selanjutnya untuk solusi dalam y terlebih dahulu dibentuk persamaan karakteristik untuk PDB kedua yaitu $p^2 - r = 0$ atau $p^2 = r$ atau $p = \pm\sqrt{r}$. Apabila kita melihat bentuk persamaan karakteristik ini maka persamaan ini bersesuaian dengan persamaan karakteristik untuk PDB pertama dengan kasus $k < 0$. Untuk itu akan ditentukan nilai solusi dalam Y untuk nilai $r < 0$.

Berdasarkan solusi dalam persamaan karakteristik untuk PDB pertama dengan kasus $k < 0$, maka solusi dalam y akan bersesuaian yaitu berbentuk

$$Y(y) = f_1 e^{\sqrt{r}y} + f_2 e^{-\sqrt{r}y} . \tag{95}$$

Karena $\cosh\sqrt{r}y = \dfrac{e^{\sqrt{r}y}+e^{-\sqrt{r}y}}{2}$ dan $\sinh\sqrt{r}y = \dfrac{e^{\sqrt{r}y}-e^{-\sqrt{r}y}}{2}$ atau $e^{\sqrt{r}y} = \cosh\sqrt{r}y+\sinh\sqrt{r}y$ dan $e^{-\sqrt{r}y} = \cosh\sqrt{r}y-\sinh\sqrt{r}y$, maka persamaan (93) dapat ditulis kembali sebagai

$$Y(y) = f_1\cosh\sqrt{r}y + f_2\sinh\sqrt{r}y. \tag{96}$$

Kemudian dengan mengaplikasikan syarat batas $Y(0)=0$ akan diperoleh

$$\begin{aligned} f_1\cosh\sqrt{r}(0)+f_2\sinh\sqrt{r}(0) &= 0\\ f_1+0 &= 0\\ f_1 &= 0. \end{aligned} \tag{97}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $f_1=0$ ke dalam persamaan (96) akan diperoleh

$$Y(y) = f_2\sinh\sqrt{r}y.$$

Karena solusi yang diharapkan adalah nontrivial maka diasumsikan nilai $f_2\neq 0$ dan fungsi $\sinh\sqrt{r}y$ merupakan fungsi periodik. Misalkan $\sqrt{r}y = m\pi$ dengan $m=1,2,3,.....$. Sehingga dengan mengambil $y=b$ diperoleh nilai $\sqrt{r}=\dfrac{m\pi}{b}$ atau $r=\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$.

Kemudian solusi $V(x,y)$ diperoleh dengan menggabungkan solusi parsial dalam x dan y. Merujuk kepada persamaan (77) maka diperoleh:

$$V(x,y) = a_2f_2\sin\sqrt{k}x\sinh\sqrt{r}y. \tag{98}$$

Kemudian dengan merujuk kepada bentuk periodik fungsi sinus kedua solusi dalam masing-masing variabel maka persamaan (98) dapat dituliskan kembali sebagai

$$V_{m,n}(x,y) = a_nf_m\sin\frac{n\pi}{b}x\sinh\frac{m\pi}{b}y. \tag{99}$$

Berdasarkan persamaan di atas dapat dilihat bahwa ada banyak kemungkinan untuk nilai V yang mungkin sebagai solusi. Mengaplikasikan prinsip superposisi diperoleh apabila $V_1,V_2,V_3,...,V_n$ adalah solusi dari suatu persamaan Poisson maka kombinasi linear dari solusi-solusi tersebut merupakan persamaan Poisson juga. Sehingga diperoleh:

$$V(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n}\sin\frac{n\pi}{b}x\sinh\frac{m\pi}{b}y. \tag{100}$$

dengan $c_{m,n}=a_nf_m$.

Koefisien $c_{m,n}=a_nf_m$ ini merupakan koefisien yang akan ditentukan berdasarkan syarat batas dalam persamaan (86). mengambil syarat batas ini akan menghasilkan

$$V(x,y=a) = V_0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n}\sin\frac{n\pi}{b}x\sinh\frac{m\pi}{b}a. \tag{101}$$

Persamaan di atas merupakan suatu ekspansi deret fourier untuk V_0. Selanjutnya dengan mengalikan persamaan di atas pada kedua ruas dengan $\dfrac{\sin d\pi}{b}x$ akan diperoleh

$$V_0\frac{\sin d\pi}{b}x = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n}\frac{\sin d\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}x\sinh\frac{m\pi}{b}a. \tag{102}$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan sepanjang interval $0<x<b$ menghasilkan

$$V_0\int_0^b\frac{\sin d\pi}{b}xdx = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n}\sinh\frac{m\pi}{b}a\int_0^b\frac{\sin d\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}xdx. \tag{103}$$

Melalui sifat orthogonalitas fungsi sinus diperoleh bahwa:

$$\int_0^{\pi} \sin d\pi x \sin n\pi x dx = \begin{bmatrix} 0, & d \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & d = n. \end{bmatrix} \tag{104}$$

Menggabungkan sifat ini ke dalam persamaan (103) dapat dilihat bahwa untuk $d \neq n$ seluruh hasilnya akan sama dengan nol kecuali untuk $d = n$. Selanjutnya persamaan (103) direduksi menjadi

$$V_0 \int_0^b \frac{\sin n\pi}{b} x dx = c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi}{b} x dx. \tag{105}$$

Selanjutnya kedua ruas akan diintegralkan secara terpisah.
Untuk ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} V_0 \int_0^b \frac{\sin n\pi}{b} x dx &= -V_0 \frac{b}{n\pi} \cos \frac{mnx}{b} \Big|_0^b \\ &= \frac{V_0 b}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi\right). \end{aligned} \tag{106}$$

Untuk ruas kanan diperoleh:

$$\begin{aligned} c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi}{b} x dx &= c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx \\ &= c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \left(x - \sin \frac{2n\pi x}{b} \Big|_0^b \right) \\ &= c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} \left(b - \sin \frac{2n\pi b}{b} - \left(0 - \sin(0)\right) \right) \\ &= c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} \left(b - \sin 2n\pi\right) \\ &= c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} b. \end{aligned} \tag{107}$$

Sehingga dengan menghubungkan ruas kiri dan kanan seperti dalam persamaan (105) diperoleh:

$$\frac{V_0 b}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi\right) = c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} b.$$

atau

$$c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} b = \frac{V_0 b}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi\right). \tag{108}$$

Oleh karena itu berdasarkan nilai dari fungsi cosinus untuk setiap variabel $n \in \mathbb{N}$ persamaan (108) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$c_{m,n} \sinh \frac{m\pi}{b} a \frac{1}{2} b = \begin{cases} \frac{4V_0}{m\pi}, & m,n = 1,3,5,... \\ 0, & m,n = 2,4,6,... \end{cases} \tag{109}$$

Sehingga diperoleh nilai konstanta:

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi \sinh \frac{m\pi}{b} a}, & m,n = ganjil \\ 0, & m,n = genap. \end{cases} \tag{110}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan nilai konstanta ini ke dalam persamaan (100) menghasilkan:

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{m,n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{b}\sinh\frac{m\pi y}{b}}{n\sinh\frac{m\pi a}{b}}. \tag{111}$$

Solusi di atas merupakan solusi lengkap untuk permasalahan yang diberikan.

Selanjutnya akan ditentukan nilai potensial listrik untuk $x=\frac{a}{3}$ dan $y=\frac{b}{5}$ dan $V_0=150$ dengan $b=2a$.

Untuk $x=\frac{a}{3}$ dan $y=\frac{2a}{5}$ maka akan diperoleh nilai $V(x,y)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{a}{3},\frac{2a}{5}\right)&=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{m,n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2a}\left(\frac{a}{3}\right)\sinh\frac{m\pi}{2a}\left(\frac{2a}{5}\right)}{n\sinh\frac{m\pi a}{2a}}\\
&=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{m,n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}\sinh\frac{m\pi}{5}}{n\sinh\frac{m\pi}{2}}\\
&=\frac{4V_0}{\pi}(19,25)\\
&=\frac{4(150)}{\pi}(19,25)\\
&=\frac{600}{\pi}(19,25)\\
&=3678 \quad \text{Volt.}
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut diperoleh bahwa nilai potensial listrik untuk $x=\frac{a}{3}$ dan $y=\frac{2a}{5}$ dan $V_0=150$ Volt dengan $b=2a$ adalah sebesar 3678 Volt.

SIMPULAN

Fungsi Green dapat dibentuk dari persamaan Poisson melalui fungsi Dirac delta dan identitas Green. Selain itu juga fungsi Green dapat dibentuk dari persamaan Poisson tetapi melalui fungsi eigen. Persamaan Poisson yang terbentuk dapat diterapkan dalam elektrostatika selanjutnya hasilnya dapat dimanfaatkan dalam menemukan medan potensial pada suatu daerah yang terbatas oleh massa jenis potensial atau arus.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Kleshchev, "Green's functions method in problems of sound diffraction," *American Journal of Modern Physics,* vol. 6, no. 4, pp. 56-65, 2017, [Online], doi: 10.11648/j.ajmp.20170604.13.

[2] K. A. Shah, *Mathematical modeling of malignant skin tumor in human body,* Thesis, Dept. Math., Veer Narmad South Gujarat University, Surat, India, 2015.

[3] W. H. Hayt & J. A. Buck, *Engineering Electromagnetics,* Singapore: McGraw-Hill Higher Education, 2006.

[4] R. L. Herman, *Introduction to Partial Differential Equations*, North Carolina, NC, USA: R.L Herman, 2015.

[5] M. Humi and W. B. Miller, *Boundary Value Problem and Partial Differential Equations,* Boston, MA, USA: Pws. Pub. Co., 1991.

[6] M. Malik, *Fungsi Green untuk Persamaan Poisson*, Skripsi, Program Studi Matematika, Universitas Indonesia, Depok, 2009.

[7] M. Munaqqib, "Penyelesaian masalah syarat batas persamaan Helmhotz menggunakan *dual reciprocity boundary element method*," *Jurnal Logika*, vol. 8, no. 2, pp. 115-132, 2018.

[8] K. A. E. A. A. Elnour, "On the calculus of Dirac delta function with some applications," *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, vol. 56, no. 4, pp. 258-259, 2018, doi: 10.14445/22315373/IJMTT-V56P537.

[9] A. Royston, *Notes on the Dirac Delta and Green Functions,* Chicago, IL, USA: University of Chicago, 2008.

[10] K.T. Tang, *Metode Matematika untuk Sains dan Teknik 2,* New York, NY: Springer, 2007.