QUADRATIC
JOURNAL OF INNOVATION AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Vol. 1, No. 2, Oktober 2021, pp. 114 – 123
Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Abstraksi Reflektif: Suatu Sudut Pandang Pemecahan Masalah Geometris

Ulfa Masamah[1]
[1]Program Studi Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
* E-mail: ulfamasamah@uin-malang.ac.id

Article History
Received: September 15th, 2021
Revised: October 31st, 2021
Accepted: October 31st, 2021
http://dx.doi.org/10.14421/quadratic.2021.012-06

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan mendeskripsikan proses abstraksi reflektif matematis siswa berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasarkan langkah-langkah Krulik dan Rudnick pada materi geometri. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif studi kasus. Subyek penelitian adalah siswa-siswi MAN 1 Ngawi yang diambil dengan teknik *purposive sampling*. Teknik pengumpulan data dilakukan dengan wawancara berbasis tugas. Hasil data tugas pemecahan masalah dan wawancara tersebut selanjutnya dipaparkan dan dianalisis menggunakan analisis deskriptif. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa siswa yang berkemampuan tinggi dalam setiap langkah pemecahan masalah sesuai tahap Krulik dan Rudnick selalu memunculkan abstraksi reflektif secara lengkap yang meliputi pengenalan (*recognition)*, representasi (*representation)*, abstraksi structural (*structural abstraction)*, dan kesadaran structural (*structural awareness).* Subyek memanfaatkan pengetahuan sebelumnya tekait dengan trigonometri dalam pemecahan masalah geometri. Dalam aktivitas abstraksi reflektif, dapat diketahui bagaimana siswa mengkonstruk pengetahuan konseptualnya, dengan cara memberikan alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat. Hal ini sesuai dengan tuntutan pembelajaran era new normal siswa dituntut dapat mengkonstruk pengetahuan matematisnya sendiri.

Kata Kunci: abstraksi reflektif, pemecahan masalah, Krulik dan Rudnick, geometri

ABSTRACT

This study aims to analyze and describe the process of mathematical reflective abstraction of students with high early mathematics ability in problem solving based on Krulik and Rudnick's steps on geometry material. This research is a case study qualitative research. The research subjects were students of MAN 1 Ngawi who were taken by purposive sampling technique. The data collection technique was done by task-based interviews. The results of the problem solving task and interview data are then presented and analyzed using descriptive analysis. The results of this study indicate that students who are highly capable in every step of problem solving according to the Krulik and Rudnick stages always bring up a complete reflective abstraction which includes recognition, representation, structural abstraction, and structural awareness. Subjects utilize previous knowledge related to trigonometry in solving geometric problems. In reflective abstraction activities, it can be seen how students construct conceptual knowledge, by providing reasons for the decisions made. This is in accordance with the demands of learning in the new normal era, students are required to construct their own mathematical knowledge.

Keywords: reflective abstraction, problem solving, Krulik Rudnick, geometry

PENDAHULUAN

Abstraksi reflektif merupakan isu atau tema yang seksi dalam penelitian pendidikan matematika [5]. Hal ini dikarenakan dalam setiap tahun selalu ada yang mengangkat, mengkaji dan meneliti isu ini. Istilah ini pertama kali diperkenalkan oleh Piaget [19], yang secara eksplisit bahwa abstraksi reflektif ini penting untuk perkembangan konsep matematika lanjut, hal ini dikarenakan konstruksi matematika diproses melalui abstraksi reflektif. Proses abstraksi reflektif berlangsung selama perkembangan kognitif dan tidak memiliki permulaan yang absolut, serta sudah muncul sejak tahapan paling awal dalam sensori motor, representasi semiotic, operasi konkret dan operasi formal [19]. Pun demikian, Dubinsky [4] menyatakan bahwa produk abstraksi reflektif adalah konsep matematika. Ide Piaget mengenai abstraksi reflektif diadopsi dan diimplementasikan oleh Cifarelli [2] dan Goodson-Espy [9] dalam penelitian yang lebih khusus tentang pemecahan masalah. Cifarelli [2] mendefinisikan level-level dalam abstraksi reflektif untuk mendesign proses pembelajaran, dan dideskripsikan level-level yang dicapai oleh mahasiswa ketika memecahkan masalah aljabar. Adapun level-level abstraksi reflektif menurut Cifarelli meliputi pengenalan (*recognition),* representasi (*representation),* abstraksi structural (*structural abstraction),* dan kesadaran structural (*structural awareness).* Goodson-Espy [9] menggunakan level-level tersebut dan menghubungkannya dengan teori reifikasi *(reification)* untuk mendeskripsikan transisi mahasiswa ketika menggunakan aritmetika pada aljabar.

Fuady [7] menggunakan komponen abstraksi reflektif yang mengacu pada komponen interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, dan generalisasi. Sedangkan Hershkowitz dkk. [11] menjelaskan abstraksi terjadi melalui tiga proses yang selanjutnya terkenal dengan model RBC (*recognition, building-with, construction).* Hasil abstraksi reflektif ini adalah skema pengetahuan pada setiap tahap perkembangan menyarikan skema dari pola aksi yang berkaitan. Skema inilah yang merupakan suatu struktur mental seseorang [24]. Hasil abstraksi mental seseorang adalah skema yang digunakan untuk memahami masalah, mencari solusi atau memecahkan masalah (matematis) [7]. Tall [25] melalui studi reviewnya menyimpulkan bahwa abstraksi matematika pada hakikatnya menggunakan abstraksi yang berfokus pada objek dan operasi objek. Lebih lanjut, aritmetika dan aljabar berfokus pada abstraksi operasi sedangkan geometri merupakan abstraksi yang berfokus pada objek. Kajian terhadap abstraksi reflektif dalam bidang geometri dilakukan oleh Mardiyah dan Budiarto [15] hasil studinya menyatakan bahwasanya subyek dari berbagai kelompok atas, menengah dan bawah telah melakukan empat level abstraks reflektif meliputi pengenalan, representasi, abstraksi structural dan kesadaran structural, yang mana kesemua subyek menggunakan atribut panjang sisi dari proses mengenali dan merangkai bangun datar segiempat.

El Walida dan Fuady [6] dalam penelitiannya menyimpulkan bahwas subyek mahasiswa semester 4 telah menunjukkan aktivitas-aktivitas pada level-level abstraksi reflektif dalam setiap tahap pemecahan masalah Polya sesuai dengan level abstraksi reflektif Dubinsky yang meliputi inteiorisasi, koordinasi, enkapsulasi dan generalisasi. Penelitian lain dilakukan Djasuli [3] hasil penelitian menunjukkan bahwa strategi pemecahan masalah tidak berbanding lurus dengan dengan mengambil kajian pada *Number sequence*. Setiap langkah pemecahan masalah dalam kajian aritmetika dan aljabar, subyek melakukan abstraksi reflektif [18]. Hal ini diperkuat dengan hasil penelitian Wiryanto [27], bahwa dalam pemecahan masalah pada materi aplikasi turunan pengoptimuman berdasar langkah-langkah Polya, dan setiap langkah-langkah tersebut dapat ditentukan abstraksi mahasiswa melalui aktivitas-aktivitas level abstraksinya yang muncul.

Cifarelli [2] dan Goodson-Espy [10] dalam penelitian yang lebih khusus, aksi pemecahan masalah yang dapat diobservasi, digunakan untuk mendefinisikan level-level dari abstraksi reflektif. Cifarelli mendefinisikan level-level dari abstraksi reflektif untuk mendeskripsikan proses pembelajaran, dan dideskripsikan level-level yang dicapai oleh mahasiswa ketika memecahkan masalah aljabar.Level-level abstraksi reflektif dimungkinkan muncul dalam setiap tahapan pemecahan masalah. Abstraksi reflektif terdapat koordinasi umum tindakan yang menggambarkan konstruksi struktur logika matematika individu dalam membangun penguatan konsep yang ada pada pemecahan masalah [7]. Untuk menyelesaikan masalah, pasti terdapat alur-alur yang dilalui oleh siswa, alur tersebut adalah langkah-langkah pemecahan masalah. Langkah pemecahan masalah dalam penelitian ini menggunakan langkah Krulik dan Rudnick. Krulik dan Rudnick [14] menyusun prosedur memecahkan masalah dalam empat langkah, yaitu: (1) membaca dan berpikir *(read and think),* (2) mengeksplorasi dan merencakan (*explore and plan),* (3) memilih strategi *(select a strategy),* (4) menentukan penyelesaian (*find an answer),* dan (5) merefleksi dan memperluas (*reflect and extend).*

Pemecahan masalah matematika dipengaruhi oleh latar belakang dan kemampuan awal matematika siswa yang beragam [22]; [17]; [26]. Usodo [26] Siswa yang berkemampuan awal tinggi menggunakan cara-cara cerdas di luar dugaan dan kebiasaan, sehingga jawaban yang dihasilkan singkat dan akurat. Tingkat variasi dari jawaban yang memiliki sekup akurasi serta membutuhkan pengembangan formula yang telah ada untuk memudahkan siswa dalam menyelesaikan masalah [26]. Dengan demikian, penelitian ini terfokus pada aktivitas siswa yang berkemampuan awal matematika tinggi dalam setiap langkah pemecahan masalah matematis dan abstraksi reflektif yang muncul.

Berbagai penelitian yang telah dilakukan menggunakan level abstraksi yang sama yaitu Cifarelli dan menggunakan tahapan pemecahan masalah Polya. Berdasar pada informasi tersebut, peneliti belum menemukan adanya penelitian abstraksi reflektif dengan menggunakan tahapan pemecahan masalah Krulik dan Rudnick. Berdasar pada latar belakang tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dan menganalisis bagaimana proses abstraksi reflektif siswa berkemampuan awal matematika tinggi pada materi bangun datar dan trigonometri. Adapun manfaat penelitian ini, abstraksi reflektif sangat penting untuk pengembangan konsep yang lebih maju dalam matematika (*advanced concepts in mathematics*) [19]. Informasi terkait proses abstraksi reflektif matematis siswa sebagai bahan untuk pemilihan strategi, pendekatan, metode, media dalam pembelajaran matematika. Lebih spesifik lagi, informasi terkait abstraksi reflektif ini dapat digunakan pendidik sebagai dasar pengembangan tugas-tugas pembelajaran matematika [21].

METODE

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan mendeskripsikan abstraksi reflektif siswa berkemampuan awal matematika tinggi dalam pemecahan masalah matematika berdasarkan tahapan Krulik dan Rudnick. Berdasar pada tujuan tersebut, penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif, yang bertujuan mendeskripsikan fenomena alamiah dan buatan manusia yang ada. Data yang dideskripsikan adalah data yang diperoleh dari tes pemecahan masalah dan hasil wawancara setelah siswa menyelesaikan soal tes.

Penelitian ini dilakukan di MAN 1 Ngawi. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas MAN Ngawi yang telah menempuh materi pelajaran bangun datar dan trigonometri. Adapun subyek penelitian dipilih dengan teknik *purposive sampling* berdasar saran dan rekomendasi dari guru mata pelajaran matematika.

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan dengan tes pemecahan masalah serta menggunakan wawancara berbasis tugas yang dilakukan peneliti sendiri kepada setiap subyek. Instrumen utama penelitian adalah peneliti sendiri sebagai pewawancara yang dibantu dengan instrumen bantu berupa soal tes pemecahan masalah dan pedoman wawancara. Validitas data dalam penelitian ini dilakukan dengan triangulasi sumber dan meningkatkan ketekunan.

Adapun teknik analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi: 1) membuat transkrip data verbal dari hasil rekaman (digunakan alat bantu perekam suara); 2) menelaah seluruh data dari sumber yaitu hasil pekerjaan subjek, hasil wawancara, dan catatan lapangan; 3) melakukan reduksi data (reduksi data hasil wawancara berbasis tugas, catatan lapangan, dan hasil pekerjaan subjek); 4) menyusun satuan-satuan analisis data dan melakukan pengkodean; 5) menganalisis dan menggambarkan berpikir reflektif siswa dalam pemecahan masalah kemudian upaya atau kiat untuk meningkatkannya; 6) melakukan penafsiran data; 7) melakukan triangulasi terhadap data pertama dan kedua untuk mendapatkan data yang valid; dan 8) menuliskan artikel penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Cifarelli dan Goodson-Espy dalam penelitiannya meneliti aksi pemecahan masalah yang dilakukan siswa untuk mendefiniskan level-level abstraksi reflektif. Selanjutnya, level abstraksi reflektif ini digunakan untuk mendeskripsikan tahapan proses pembelajaran dan level yang dicapai oleh siswa dideskripsikan ketika memecahkan masalah [18] dan level-level dalam abstraksi reflektif ini bukan level yang bertingkat. Level-level abstraksi reflektif bisa dikatakan level istimewa karena level-level tersebut merupakan tahapan untuk mengidentifikasi dan mendeskripsikan pemecah masalah pada konsep tertentu pada saat melakukan proses pemecahan masalah matematika [27]. Berikut adalah indikator atau karakteristik abstraksi reflektif dalam setiap level aktivitas [27].

Tabel 1.
Karakteristik Level Abstraksi Reflektif

Level –level Abstraksi	Karakteristik
Recognition	a. Mengingat kembali aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi. b. Mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan masalah yang sedang dihadapi.
Representation	a. Menyatakan hasil pemikiran sebelumnya dalam bentuk simbol matematika, katakata, grafik untuk membantu refleksi/rekonstruksi b. Menerjemahkan dan mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika. c. Menjalankan metode solusi alternatif yang mungkin
Structural Abstraction	a. Merefleksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru. b. Mengembangkan strategi baru untuk suatu masalah, dimana sebelumnya belum digunakan. c. Mengantisipasi sumber kesulitan dalam proses penyelesaian apabila digunakan metode yang lain. d. Mereorganisasikan struktur masalah matematika berupa menyusun, mengorganisasikan dan mengembangkan.
Structural Awarenes	a. Sadar akan kemampuannya untuk mengantisipasi hasil pemecahan masalah tanpa menjalankan semua aktivitas yang dipikirkan. b. Memberikan argumen-argumen atau alasan-alasan terhadap keputusan yang dibuat. c. Sadar akan kesulitan selama proses penyelesaian apabila digunakan alternatif metode penyelesaian yang lain. d. Merefleksikan keputusan yang diperoleh untuk aktivitas berikutnya. e. Mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemecahan masalah.

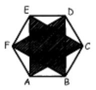
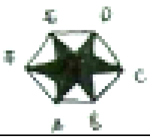
Level-level abstraksi reflektif tersebut dimungkinkan muncul dalam setiap tahapan pemecahan masalah. Dalam pemecahan masalah dibutuhkan prosedur yang mengacu pada keterampilan mengurutkan tahapan atau yang dikenal dengan algoritma pemecahan masalah. Pemecahan masalah merupakan sebuah proses berpikir [14]. Lebih lanjut, Krulik dan Rudnick [14] menjelaskan langkah-langkah dalam pemecahan masalah adalah sebagai berikut. **1)**

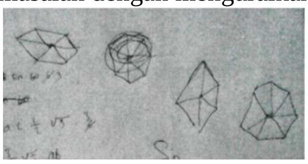
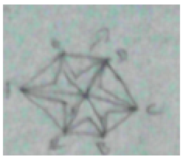
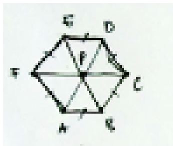
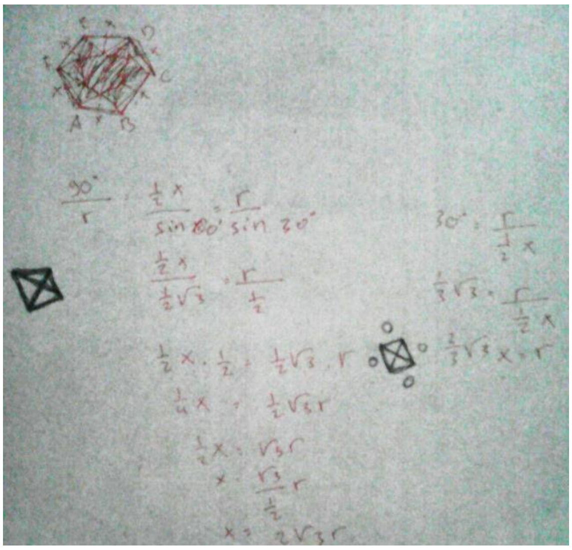
Membaca dan Berpikir (*Read and think*). Adapun kegiatan-kegiatan yang dilakukan dalam langkah membaca dan berpikir (*Read and Think*) ini meliputi: a) mengidentifikasi fakta-fakta (*identify the facts*); b) mengidentifikasi pertanyaan (*identify the question*); c) Memvisualisasi situasi (*visualize the situation*); d) Menjelaskan aturan (*describe the setting*); menulis ulang masalah (*restate the action*). **2) Mengeksplorasi dan Merencanakan (*Eksplore and plan*).** Adapun kegiatan-kegiatan yang dilakukan dalam langkah ini adalah a) mengorganisasikan informasi (*organize the information*); b) identifikasi kecukupan informasi (*is there enough information?*); c) identifikasi apakah ada informasi yang lebih (*is there too much information?*); d) menggambar diagram atau mengkonstruksi model pemecahan masalah (*draw a diagram or construct a model*); e) membuat bagan atau tabel (*make a chart or a table*).

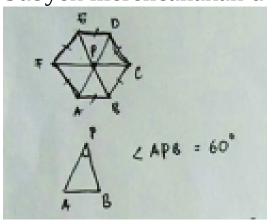
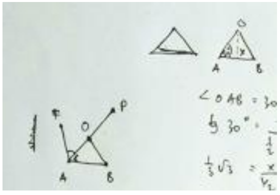
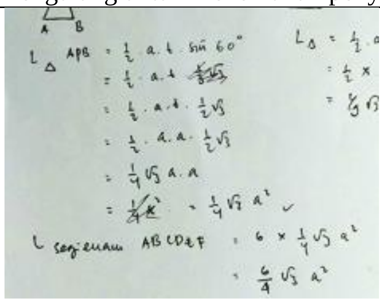
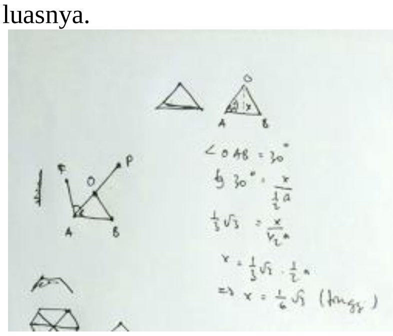
3) Memilih Strategi (*Select a strategy*). Kegiatan-kegiatan dalam langkah ini meliputi: a) pengenalan pola *(pattern recognition*); b) bekerja mundur (*working backwards); c)* menebak dan uji *(guess and test);* d) simulasi atau eksperimen *(simulation or experimentation)*; e) pengurangan atau perluasan (*reduction or expansion*); f) daftar terorganisir / daftar lengkap *(organized listing/exhaustive listing);* g*)* deduksi logis *(logical deduction);*dan h) menyelesaikan masalah *(divide and conquer).***4) Menentukan Penyelesaian (*Find an answer*).** Pada langkah ini, adapun kegiatan siswa meliputi: a) hipotesis/perkiraan (*estimate*); b) menggunakan keterampilan komputasi (*use computational skills*); c) menggunakan kemampuan aljabar dan geometri (*use algebraic and geometric skills).***5) Merefleksi dan Generalisasi (*Reflect and Extend*)**. Adapun kegiatan-kegiatan yang dilakukan dalam langkah ini adalah a) mengecek kebenaran jawaban (*check an answer*) yang meliputi pengecekan perhitungan, apakah pertanyaan sudah terjawab, apakah jawabannya masuk akal, dan hubungan antara jawaban dengan hipotesis yang disusun; b) mencari solusi alternatif (*find alternative solutions*); c) bagaimana jika…(*what if…*) yang mencakup generalisasi dan konsep matematika.

Berikut merupakan hasil penelitian dan pembahasan terkait proses abstraksi reflektif matematis siswa berkemampuan matematika tinggi dalam pemecahan masalah berdasar langkah Krulik dan Rudnick.

Tabel 2.
Rangkuman Hasil Abstraksi Reflektif Matematis Siswa Berkemampuan Matematika Tinggi dalam Pemecahan Masalah Bangun Datar

Level Abstraksi Reflektif	Aktivitas dalam Langkah Pemecahan Masalah
Mambaca dan Berpikir (*read and think)*	
Pengenalan (*recognition)*	 Tentukan perbandingan luas segienam beraturan ABCDEF dengan luas daerah diarsir! Subyek telah memahami soal dengan membaca berulang, sekalipun butuh beberapa waktu dalam memahaminya. Subyek mengingat kembali terkait rumus luas bangun datar.
Representasi (*representation)*	Subyek mampu menjelaskan secara verbal informasi yang tersedia dalam soal dan apa yang ditanyakan, sekalipun sesekali kembali membaca soal untuk meyakini kebenaran apa yang dipikirkannya Diketahui: gambar segienam beraturan didalamnya terdapat daerah yang diarsir Ditanya: perbandingan luas segienam dengan luas daerah yang diarsir Subyek membuat gambar seperti pada soal 
Abstraksi structural (*structural abstraction)*	Subyek telah mampu menjunjukkan gambaran hubungan antara 3 buah bangun datar yaitu segienam beraturan, 6 segitiga dan daerah diarsir. Berulang kali untuk menyatakannya (menyatakan hubungan apa yang diketahui dengan yang ditanyakan)
Kesadaran structural (*structural awareness*)	Subyek mampu memahami bahwa didalam segienam terdapat 6 segitiga yang kongruen, siswa diminta menentukan luas daerah yang diarsir
Mengeksplorasi dan Merencakan (*Eksplore and Plan)*	
Pengenalan (*recognition)*	Mengenal kembali (mengingat) apa yang diketahui dan yang ditanyakan, metode pemecahan masalah yang pernah diselesaikan dalam materi yang sama, geometri
Representasi (*representation)*	Subyek membuat rencana dengan membuat bentuk gambar dan memahami struktur masalahnya. Kemudian subyek mengurai gambar tersebut ke dalam bagian-bagiannya. Tampak subyek menggambar segienam beraturanyang dilengkapi garis bantu.

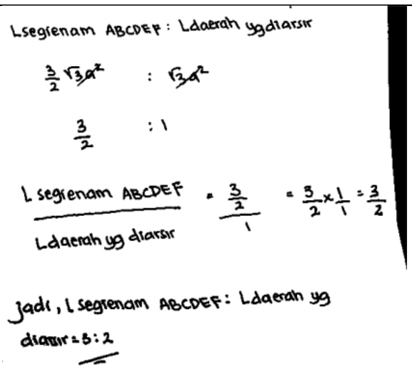
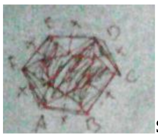
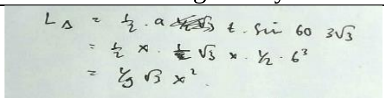
	 
Abstraksi structural (*structural abstraction)*	Mengabstraksikan struktur yang sudah direpresentasikan dengan symbol-simbol Panjang sisi-sisi segienam yaitu AB =BC=CD=DE=EF=FA Syarat, segienam tersebut beraturan, tidak diketahui ukuran, akan tetapi bisa ditentukan besar sudut apit dari masing-masing segitiga dalam segienam beraturan tersebut. Sehingga, $L\ segienam\ ABCDEF = \frac{1}{2} \times a \times t \times \sin P$ L segitiga = $\frac{1}{2}\ x\ a\ x\ t$
Kesadaran structural (*structural awareness*)	Menyadari dan mengekspresikan apa yang diabstraksikan tentang yang direpresentasikan dengan symbol-simbol dan rumus. Subyek menyadari bahwa informasi yang tersedia dalam soal belum cukup untuk memecahkan masalah, tidak ada ukuran panjang sisi bangun datar tersebut, sehingga menggunakan rumus dengan terlebih dulu mencari besaran sudutnya. Mengabstraksikan alternative metode pemecahan masalah yang lain
Memilih strategi (*select a strategy)*	
Pengenalan (*recognition)*	Mengenal kembali struktur masalah yang pernah diselesaikan dan menghubungkan atau membandingkan ke dalam situasi masalah yang dihadapi Subyek dapat mensketsa gambar kemudian memberikan garis bantu untuk menyelesaikannya. Garis bantu tersebut memudahkan subyek dalam menyelesaikan masalah
Representasi (*representation)*	Subyek memilih strategi dengan *trial* dan *error*. Siswa mengenalkan pola pemecahan masalah dengan menguraikan soal ke dalam bagian-bagiannya yang lebih rinci.   
Abstraksi structural (*structural abstraction)*	Subyek mencari strategi denga trial error dengan mengaitkan beberapa pengetahuan yang dimilikinya. Siswa mengenalkan pola pemecahan masalah dengan menguraikan soal ke dalam bagian-bagiannya yang lebih rinci. Subyek terlihat menebak dan menguji strategi yang dipilihnya  Subyek memberikan garis bantu untuk mencari luas segienam beraturan, memisahkan bangun datar yang ada, antara segienam beraturan, daerah diarsir dan 6 segitiga kecil Subyek memberi nama titik tengah segienam sebagai P, dan pada arsiran luasan APB, siswa mempunyai hipotesis bahwa $\angle APB$ merupakan $\frac{1}{6}$ dari sudut penuh satu putaran

	360^0 selanjutnya memberikan nama titik sudut O pada segitiga kecil sehingga terbentuk segitiga AOB
Kesadaran structural (*structural awareness*)	Siswa menyadari bahwa untuk mencari luas segitiga APB dan segitiga lain yang kongruen maka harus mengetahui dulu besar sudut masing-masing sudut segitiga tersebut. Besar sudut tersebut adalah 60^0. Subyek menyadari bahwa strategi-strategi yang dituliskan adalah hasil trial eror dan berpikir sejenak untuk menentukan strategi terbaik untuk menyelesaikan soal
Menentukan penyelesaian (*find an answer*)	
Pengenalan (*recognition*)	Mengenal kembali struktur masalah yang sudah pernah diselesaikan dan menghubungkan atau membandingkan ke situasi masalah yang dihadapi Subyek dapat menyelesaikan masalah sesuai dengan rencana, yaitu dengan menggunakan pertolongan garis tinggi menentukan luas segitiga dari 1/6 segienam beraturan kemudian ditentukan rumus luas segitiga samasisi. Memberikan nama P sebagai titik pusat segienam dan O untuk titik sudut segitiga AOB. Dari dua titik pusat ini kemudian dibuat garis bagi tinggi dan garis bagi berat untuk menyelesaikan masalah
Representasi (*representation*)	Subyek merencanakan dengan benar dengan represntasi strategi sebagai berikut.  Subyek melaksanakan rencana dan menentukan penyelesaian sekalipun beberapa kali mengulang untuk menemukan penyelesaian yang tepat
Abstraksi structural (*structural abstraction*)	 Subyek menjelaskan secara verbal bahwa dengan menggunakan titik pusat segienam P maka luasan segitiga dari 1/6 segienam akan diperoleh, sehingga luas segienam bisa diperoleh. Subyek menyadari bahwasanya titik sudut O dapat diguanakn untuk menentukan kedudukan alas, tinggi, saris tinggi segitiga AOB sehingga luas segitiga AOB dapat ditentukan Terlihat bahwa, dengan menggunakan rumus $\frac{1}{2} x\ a\ x\ t\ x\ sin\ 60^0$ untuk mencari luas segitiga PAB. Setelah luas segitiga PAB ditemukan, siswa menentukan luas daerah segienam beraturan. Selanjutnya, untuk menentukan luas daerah segitiga sisa arsiran, subyek terlebih dahulu menentukan besar sudut OAB, menentukan tinggi segitiga kemudian menentukan luasnya. 

<table>
<tr><td></td><td>
$L\Delta AOB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t$
$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$
$= \frac{1}{12}\sqrt{3}\,a^2$
$L\Delta$ diluar daerah yg diarsir $= \frac{1}{12}\sqrt{3}\,a^2 \cdot 6$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2$
L daerah yg diarsir $= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2$
$= \frac{2\sqrt{3}}{2}a^2$
$= \sqrt{3}\,a^2$
Lsegienam ABCDEF : Ldaerah yg diarsir
$\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2 \quad : \quad \sqrt{3}\,a^2$
$\frac{3}{2} \quad : \quad 1$
$\frac{\text{L segienam ABCDEF}}{\text{Ldaerah yg diarsir}} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$
Jadi, L segienam ABCDEF : Ldaerah yg diarsir = 3 : 2

Berdasar pengerjaan subyek, subyek mengembangkan strategi baru untuk menyelesaikan masalah yang sebelumnya belum digunakan, kemudian menyusun mengorganisasikan dan mengembangkan penyelesaian masalah.
</td></tr>
<tr><td>Kesadaran structural (structural awareness)</td><td>
Nampak bahwa, setelah siswa membuat garis bantu, siswa dapat menentukan besar sudut APB, yaitu 60^0. Kemudian sudut tersebut digunakan subyek menentukan luas segitiga APB. Diperoleh luas segitiga APB adalah $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$ satuan luas. Selanjutnya luas segitiga APB tersebut digunakan untuk menentukan luas segienam beraturan.
Setelah proses komputasi subyek dapat menentukan luas segienam beraturan yaitu 6 kali luas segitiga APB, hal ini dikarenakan ukuran segienam tersebut beraturan sehingga diperoleh $Lsegienam\ beraturan = 6\ x\ L\Delta APB$
$= 6\ x\ \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$
$= \frac{6}{4}\sqrt{3}a^2$

Siswa menyadari bahwa sudut OAB adalah 30^0, selanjutnya diguanakn untuk menentukan tinggi segitiga ABO dengan memanfaatkan rumus Pythagoras. Sehingga diperoleh tinggi segitiga ABO adalah $\frac{1}{6}\sqrt{3}$
Selanjutnya luas segitiga ABO dapat ditentukan dengan rumus $L\Delta ABO = \frac{1}{2}\ a$ t
Subyek mampu memberikan argument atau alasan dengan benar terhadap keputusan yang dibuat dan mampu meringkas aktivitasnya dengan benar
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Merefleksi dan generalisasi (reflect and extend)</td></tr>
<tr><td>Pengenalan (recognition)</td><td>
Subyek mampu mengingat dan mengidentifikasi kembali hasil yang dipeoleh, yaitu luas segienam adalah $\frac{6}{4}\sqrt{3}\ a^2$ satuan luas, Luas segitiga sisa arsiran adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ a^2$ satuan luas,
Luas daerah yang diarsir adalah $\sqrt{3}\ a^2$ satuan luas
</td></tr>
</table>

Representasi (*representation*)	  subyek menyadari bahwa strategi yang menjadi idenya tidak dapat menemukan jawaban, sehingga gambar dicoret dan menemukan strategi lainnya.
Abstraksi structural (*structural abstraction)*	 Jadi luas segienam adalah $\frac{6}{4}\sqrt{3}\,a^2$ satuan luas, Luas segitiga sisa arsiran adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2$ satuan luas, Luas daerah yang diarsir adalah $\sqrt{3}\,a^2$ satuan luas Sehingga Perbandingan luas segienam beraturandengan luas daerah yang diarsir adalah 3 : 2
Kesadaran structural (*structural awareness*)	Mengantisipasi hasil yang diperoleh apabila menggunakan metode yang lain Menyadari keputusan atau kesimpulan yang diperoleh, menyederhanakan aktivitas pemecahan masalah

Berdasar pada hasil pengerjaan siswa, diketahui bahwa siswa dalam setiap langkah pemecahan masalah selalu menghadirkan abstraksi reflektif. Subyek kembali merepresentasikan masalah dengan menggambar ulang, sekalipun gambar objek yang dibuatnya tidak memperhatikan kaidah bahwa segienam tersebut beraturan. Artinya subyek tersebut melakukan representasi internal maupun eksternal. Representasi ini memungkinkan matematika menjadi transparan. Solso [23] mengistilahkannya dengan perumpamaan atau pembayangan mental (*mental imagery*). Pembayangan mental sebagai objek mental untuk melakukan proses berpikir reflektif [8]. Pembayangan mental akan membantu dan menuntun dalam mereorganisasikan berbagai pengetahuan dan merekonstruksi konsep dari masalah. Pada tahap abstraksi structural, siswa mampu melewatinya dengan baik sekalipun harus beberapa kali merecall memorinya terkait pengetahuan relevan. Subyek dapat memunculkan kembali skema

Luas segitiga adalah setengah hasil kali dua sisi dengan sudut apitnya.

L ΔABC = ½ ac sin ∠B = ½ ab sin ∠C = ½ bc sin ∠C

Pada level kesadaran struktural ini, siswa akan menunjukkan satu kemampuan untuk mengantisipasi hasil-hasil dari aktivitas potensial tanpa harus menyelesaikan semua aktivitas yang dipikirkan. Kesadaran struktural mengacu pada kesadaran metakognisi siswa mengenai aktivitas dan organisasi pada struktur kognitifnya. Struktur yang diciptakan oleh siswa dalam pemecahan masalah menjadi sebuah objek refleksi. Siswa mampu memikirkan struktur sedemikian sebagai objek-objek dan mampu membuat keputusan tentang hal tersebut tanpa mengusahakan bentuk fisik atau secara mental merepresentasikan metode penyelesaian. Ketika seorang *problem solver* mencapai level yang lebih tinggi pada abstraksi reflektif, pemikiran menjadi makin bertambah fleksibel. Kesadaran structural memfasilitasi abstraksi struktural dalam masalah dan menghasilkan perumusan generalisasi matematika [1]. Beroperasi pada tingkat abstraksi reflektif yang lebih tinggi memungkinkan para siswa ini untuk mempertimbangkan konsep sebagai proses dan objek abstrak. Mengembangkan kemampuan ini ditemukan sangat penting dalam mencapai transisi menggunakan metode aljabar. Secara keseluruhan subyek berkemampuan awal matematika tinggi selalu memunculkan abstraksi reflektif dalam setiap tahap pemecahan masalah Krulik dan Rudnick.

Jonansen [12] mengatakan bahwa hasil abstraksi mental seseorang adalah skema yang digunakan untuk mengerti sesuatu hal, menemukan jalan keluar atau memecahkan masalah. Dalam aktivitas pemecahan masalah pada suatu situasi, siswa sering menghubungkan aktivitas tersebut ke situasi pemecahan masalah berikutnya. Jika siswa telah mampu menghubungkan secara eksplisit metode penyelesaian masalah yang baru dengan masalah semula, penemuan seperti itu memberikan kesan bahwa konstruksi dari struktur abstrak dapat memungkinkan *problem solver* mempunyai antisipasi tentang sifat dan ruang lingkup dari aktivitas pemecahan masalah berikutnya, artinya mereka dapat "melihat" bahwa pemecahan masalah berikutnya dalam beberapa hal sama dengan pemecahan yang telah mereka miliki. Hal ini diperkuat dengan penelitian Kariadinata [13], hasil penelitianya menunjukkan bahwa level-level abstraksi reflektif mahasiswa dalam setiap tahapan pemecahan masalah (Polya) telah tercapai semuanya yang ditunjukkan dengan rata-ratanya adalah 73,31% (sedang), yang disebabkan oleh karena kemampuan prasyarat siswa mempengaruhi kemampuan abstraksi reflektif mahasiswa dalam materi aljabar linear.

Hasil penelitian ini diperkuat oleh penelitian sebelumnya, Mustikarini [16] bahwasanya siswa dengan gaya kognitif *field independent* dalam memecahkan masalah matematika mampu melakukan tahapan solusi pada keempat level abstraksi reflektif dengan tepat, sedangkan siswa dengan gaya kognitif *field dependent* dalam memecahkan masalah matematika hanya mampu melakukan tahapan solusi pada level pengenalan (*recognition*) dan representasi (*representation*). Lebih lanjut, subyek tidak mampu melakukan tahapan solusi pada level abstraksi struktural (*structural abstraction*) karena siswa cenderung berpikir global, sehingga melakukan kesalahan karena terkecoh dengan soal dan tidak teliti. Konsep yang digunakan pada level abstraksi struktural (*structural abstraction*) sudah salah sehingga subyek tidak mampu melakukan tahapan solusi pada level kesadaran struktural (*structural abstraction*).

SIMPULAN

Berdasar pada hasil penelitian dan pembahasan di atas, simpulan dalam penelitian ini bahwa dalam setiap langkah pemecahan masalah dimungkinkan akan muncul abstraksi. Subyek berkemsmpuan awal matematika tinggi selalu memunculkan abstraksi reflektif dalam setiap langkah pemecahan masalah sesuai dengan tahapan Krulik dan Rudnick pada materi Geometri. Abstraksi reflektif ini meliputi empat fase yaitu fase pengenalan (*recognition*), representasi (*representation,*) abstraksi struktural (*structural abstraction*), dan kesadaran structural *(structural awareness).* Abstraksi reflektif merupakan salah satu sudut pandang dalam pemecahan masalah geometry untuk selanjutnya dalam perolehan pengetahuan matematika lanjutan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bharath S., Reflective Abstraction, Uniframes and the Formulation of Generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior Vol. 23, Issue 2*, 2004, P. 205-222. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.005

[2] Cifarelli, V., "The Role of Abstraction as a Learning Process in Mathematical Problem Solving. Indiana, USA: Purdue University, 1988.

[3] Djasuli, M., dkk., "Students' Reflective Abstraction in Solving Number Sequence Problems*," IJME*, 12:3, 2017.

[4] Dubinsky, E. "Constructive Aspect of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. Dalam L. P. Steffe (Ed.). Epistemological Foundation of Mathematical Experience (pp. 160-202). New York: Springer, 1991. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9

[5] Dubinsky, E., & Lewin, P. "Reflective abstraction and mathematics education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness," *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*(1), 55–92, 1986.

[6] El Walida dan Fuady, "Abstraksi Reflektif Siswa Dalam Memecahkan Masalah Matematika Berdasarkan Gaya Kognitif", *Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*, 6, 465, 2017.

[7] Fuady, A.. "Berpikir Reflektif dalam Pembelajaran Matematika". *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika. Vol. 1 No 2. 104-107*, 2016.

[8] Gagatsis, A. dan Patronis, T. "Using Geometrical Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics. *Educational Studies in Mathematics Netherlands, Vol. 21, 29-54,* 1990.

[9] Goodson-Espy T., "Reflective Abstraction as an Individual and Collective Learning Mechanism," *Constructivist Foundations*, 381-383, 2014.

[10] Goodson-Espy, "T. The Roles of Reification and Reflective Abstraction in the Development of Abstract Thought: Transitions from Arithmetic to Algebra," *Educational Studies in Mathematics* **36,** 219–245, 1998. https://doi.org/10.1023/A:1003473509628

[11] Hershkowitz et.al (2001 Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. "Abstraction in Context: Epistemic Action," *Journal for Research in Mathematics Education* , 32, 195-222, 2001.

[12] Jonassen, D. H. *Learning to Solve Problem. An Intsructional Design Guide*. San Fransisco USA: John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[13] Kariadinata, R., "Students' Reflective Abstraction Ability on Linear Algebra Problem Solving and Relationship with Prerequisite Knowledge," *Infinity*, 10(1), 1-16, 2021.

[14] Krulik, S. dan Rudnick, J. A., *Problem Solving: A Handbook for Teachers*. Boston: Allyn & Bacon, 1988.

[15] Mardiyah, U.R. & Budiarto, M.T., "Abstraksi Reflektif dalam Mengonstruk Bangun Segiempat," *MATHEedunesa; Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika Vol. 8 No. 2, 2019, PP. 517-523*.

[16] Mustikarini, A. A., "Level Abstraksi Reflektif Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Gaya Kognitif. *Skripsi*. UIN Sunan Ampel Surabaya: Tidak Diterbitkan, 2020.

[17] Nurman, T. A. *Profil Kemampuan Siswa SMP dalam Memecahkan Masalah Matematika Open Ended Ditinjau dari Perbedaan Tingkat Kemampuan Matematika.* PPS UNESA. Surabaya: Tidak diterbitkan, 2008.

[18] Panjaitan, B., *Level-Level Abstraksi Reflektif dalam Pemecahan Masalah Matematika*, http://repository.uhn.ac.id/handle/123456789/410, 2009.

[19] Piaget, J., & Beth, E. W., "Mathematical Epistemology and Psychology," (W. Mays, Trans.) Paris: Springer Science Bussiness Media, 1966.
[20] Piaget, J., Genetic Epistemology. New York: The Norton Library, 1971.
[21] Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M., Explicating a Mechanism For Conceptual Learning: Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education* National Council of Teachers of Mathematics, Vol. 35, No. 5, 2004, pp. 305-329. https://doi.org/10.2307/30034818
[22] Siswono, T. Y. E., "Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kreatif dan Identifikasi Tahap Berpikir Kreatif Siswa dalam Memecahkan dan Mengajukan Masalah Matematika". *Disertasi* PPS UNESA. Surabaya: Tidak diterbitkan, 2007.
[23] Solso, L.R., Maclin, H.O., dan Maclin, K. M., *Psikologi Kognitif*. Jakarta: Erlangga, 2008.
[24] Suparno, P., *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget.* Yogyakarta. Kanisius, 2001.
[25] Tall, D., "Using Technology to Support an Embodied Approach Learning Concept in Mathematics", First Coloquio de Historia e Techologia no Ensino de Matematics at Universidade do Estado do Rio De Janiero, 2002.
[26] Usodo, B., "Karakteristik Intuisi Siswa SMA dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika dan Perbedaan Gender," Jurnal Untad. *AKSIOMA*, 2012.
[27] Wiryanto, "Level-level Abstraksi dalam Pemecahan Masalah Kalkulus", *Jurnal Pendidikan Teknik Elektro* , 03, 80, 2014.